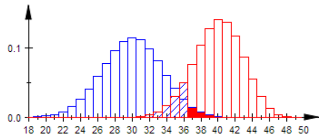
Q12 * Mathematik * Aufgaben zum Alternativtest



1. An eine Werkstatt werden Schachteln mit Schrauben geliefert. Ein Teil davon enthält Erste Qualität, das sind Schrauben, von denen nur 10% die vorgeschriebenen Maßtoleranzen nicht einhalten. Die restlichen Schachteln enthalten Zweite Qualität mit einem Ausschuss von 40%. Die Lieferfirma hat vergessen, die Schachteln nach ihrem Inhalt zu kennzeichnen.
   a) Man entnimmt jeder Schachtel (mit Zurücklegen) 5 Schrauben. Sind alle Schrauben bis auf höchstens eine in Ordnung, so soll der Schachtelinhalt als Erste Qualität behandelt werden, andernfalls als Zweite Qualität. Bestimmen Sie die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten!
   b) Man entnimmt jeder Schachtel 10 Schrauben und will den Fehler, irrtümlich Erste Qualität für Zweite Qualität zu halten, unter den Wert von 5% bringen.
   Wie muss dafür die Entscheidungsregel lauten?
   Wie groß ist dann der Fehler, irrtümlich Zweite Qualität für Erste Qualität zu halten?

2. Bei einer Prüfung werden n Fragen gestellt. Wir nehmen an, dass ein Prüfling alle Fragen unabhängig voneinander je mit der Wahrscheinlichkeit p richtig beantwortet. Die geforderte Mindestzahl richtiger Antworten soll nun so gewählt werden, dass ein sehr gut vorbereiteter Prüfling ($p = 97\%$) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% die Prüfung besteht, ein schlecht vorbereiteter ($p = 75\%$) aber mit mindestens 90% Sicherheit durchfällt.
   Zeigen Sie, dass diese Bedingung bei $n = 15$ nicht, bei $n = 100$ jedoch erfüllt werden können und geben Sie jeweils die möglichen Grenzen zwischen „bestanden" und „nicht bestanden" an.

3. Ein Elektrohändler vereinbart mit einem Lieferanten von Glühbirnen, dass er einen bestimmten Preisnachlass erhält, falls der Anteil p an defekten Glühbirnen einer größeren Lieferung 10% übersteigt.
   Vereinbarungsgemäß werden der ganzen Sendung 50 Glühbirnen zufällig entnommen und geprüft. Ergeben sich mehr als 7 defekte Glühbirnen, so soll angenommen werden, p übersteigt 10%.
   (Bemerkung: Selbstverständlich werden die Glühbirnen ohne Zurücklegen entnommen.
   Da es sich aber um eine sehr große Lieferung handelt, macht es für die Rechnung keinen wesentlichen Unterschied, ob mit oder ohne Zurücklegen entnommen wird.)

a) Wie groß ist das Risiko des Lieferanten, einen Preisnachlass gewähren zu müssen, obwohl nur 10% der Glühbirnen defekt sind?
b) Wie groß ist das Risiko des Händlers, keinen Preisnachlass zu erhalten, obwohl 20% der Glühbirnen defekt sind?
c) Wie müsste das Entscheidungsverfahren eingerichtet werden, damit der Händler höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% zu Unrecht einen Preisnachlass erhält?
d) Wie müsste die Entscheidungsregel lauten, damit der Händler mit mindestens 75% Wahrscheinlichkeit einen Preisnachlass erhält, wenn 20% der Glühbirnen defekt sind?

4. In einer Schießbude gibt es sehr gute und mittelmäßige Gewehre (Trefferwahrscheinlichkeiten 0,90 bzw. 0,70). Weil bei einem davon die geheime Kennzeichnung unleserlich geworden ist, macht der Besitzer mit ihm 20 Probeschüsse.
   Er weiß, dass ihm der Fehler, ein schlechtes Gewehr fälschlich für ein gutes zu halten, mehr Schaden bringt als der umgekehrte Irrtum (Verärgerung anspruchsvoller Kunden!). Er möchte daher die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler nur halb so groß machen wie für den zweiten Fehler.
   Welche Entscheidungsregel muss er aufstellen?

Q12 * Mathematik * Aufgaben zum Alternativtest * Lösungen

1. a) $n = 5$ $\quad H_o: \; p = p_o = 10\%$ (1. Qualität) $\quad A = A_o = \{0,1\}$

$H_1: \; p = p_1 = 40\%$ (2. Qualität) $\quad \overline{A} = A_1 = \{2,3,4,5\}$

Irrtümliche Ablehnung 1. Qualität: $\alpha = P_{0,1}^{5}(X \geq 2) = 1 - P_{0,1}^{5}(X \leq 1) = 1 - 0,91854 = 8,146\%$

Irrtümliche Annahme 1. Qualität: $\quad ß = P_{0,4}^{5}(X \leq 1) = 33,696\%$

b) Es soll für $A = \{0,1,\ldots,k\}$ gelten:

$P_{0,1}^{10}(X \geq k+1) \leq 5\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,1}^{10}(X \leq k) \leq 5\% \Leftrightarrow 95\% \leq P_{0,1}^{10}(X \leq k) \Leftrightarrow P_{0,1}^{10}(X \leq k) \geq 95\%$

Nach Tabelle ist das für $k \geq 3$ der Fall. Man wählt daher $A = \{0,1,2,3\}$

Irrtümliche Annahme 1. Qualität erfolgt nun mit Wahrscheinlichkeit $ß = P_{0,4}^{10}(X \leq 3) = 38,228\%$.

2. $n \in \{15,100\}$ $\quad H_o: \; p = p_o = 97\%$ (gut vorbereitet) $\quad A = A_o = \{k+1,\ldots,n\}$

$H_1: \; p = p_1 = 75\%$ (schlecht vorbereitet) $\quad \overline{A} = A_1 = \{0,1,\ldots,k\}$

Es soll gleichzeitig gelten:

P(„guter“ Prüfling besteht) $\geq 98\%$ und P(„schlechter“ Prüfling fällt durch“) $\geq 90\%$, d.h.

$P_{0,97}^{n}(X \geq k+1) \geq 0,98 \Leftrightarrow P_{0,97}^{n}(X \leq k) \leq 0,02$ und $P_{0,75}^{n}(X \leq k) \geq 0,90$

Für $n = 15$ folgt mit Tabelle: $k \leq 12$ und $k \geq 13$ und das ist für kein $k \in \mathbb{N}$ möglich.

Für $n = 100$ folgt mit Tabelle: $k \leq 92$ und $k \geq 80$, d.h. für jedes $k \in \{80,81,\ldots,92\}$ sind beide Bedingungen erfüllt.

3. $n = 50$ $\quad H_o: \; p = p_o \leq 10\%$ (gute Qualität) $\quad A = A_o = \{0,1,\ldots,7\}$

a) $P_{0,1}^{50}(X \geq 8) = 1 - P_{0,1}^{50}(X \leq 7) = 1 - 0,87785 = 12,215\%$

b) $P_{0,2}^{50}(X \leq 7) = 0,19041 = 19,041\%$

c) Annahmebereich für „gute“ Lieferung: $\quad A = A_o = \{0,1,\ldots,k\}$

Es soll gelten: $P_{p\leq 0,1}^{50}(X \geq k+1) \leq 5\% \Leftrightarrow P_{0,1}^{50}(X \geq k+1) \leq 5\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,1}^{50}(X \leq k) \leq 5\% \Leftrightarrow$

$95\% \leq P_{0,1}^{50}(X \leq k) \Leftrightarrow P_{0,1}^{50}(X \leq k) \geq 95\% \Leftrightarrow k \geq 9$

Wähle daher den Annahmebereich $A = A_o = \{0,1,\ldots,9\}$

d) Annahmebereich für „gute“ Lieferung: $\quad A = A_o = \{0,1,\ldots,k\}$

Es soll gelten: $P_{0,2}^{50}(X \geq k+1) \geq 75\% \Leftrightarrow 1 - P_{0,2}^{50}(X \leq k) \geq 75\% \Leftrightarrow P_{0,2}^{50}(X \leq k) \leq 25\% \Leftrightarrow k \leq 7$

Wähle daher den Annahmebereich $A = A_o = \{0,1,\ldots,7\}$

4. $n = 20$ $\quad H_o: \; p = p_o = 90\%$ (hohe Trefferquote) $\quad A = A_o = \{k+1,\ldots,20\}$

$H_1: \; p = p_1 = 70\%$ (schlechte Trefferquote) $\quad \overline{A} = A_1 = \{1,\ldots,k\}$

Es soll gelten:

P(„schlechtes Gewehr wird für gutes gehalten“) $\approx \frac{1}{2} \cdot$ P(„gutes Gewehr wird für schlechtes gehalten“) d.h.

$P_{0,70}^{20}(X \geq k+1) \approx 0,5 \cdot P_{0,90}^{20}(X \leq k) \Leftrightarrow 1 - P_{0,70}^{20}(X \leq k) \approx 0,5 \cdot P_{0,90}^{20}(X \leq k)$

Blick in die Tabelle zeigt:

k	$1 - P_{0,70}^{20}(X \leq k)$	$0,5 \cdot P_{0,90}^{20}(X \leq k)$
15	23,751%	2,1585%
16	10,709%	6,6475%
17	3,548%	16,1535%

Am besten ist die Bedingung erfüllt für $k = 16$.

Wähle daher den Annahmebereich für ein gutes Gewehr mit $A = A_o = \{17,\ldots,20\}$