Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Die Exponentialfunktion

1. In einer Zellkultur beobachtet man pro 15 Minuten eine Zunahme der Zellenanzahl um 3,5%.
   a) Beschreiben Sie die Anzahl A(t) der Zellen durch eine passende Exponentialfunktion.
   b) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Zellen an einem Tag zu?

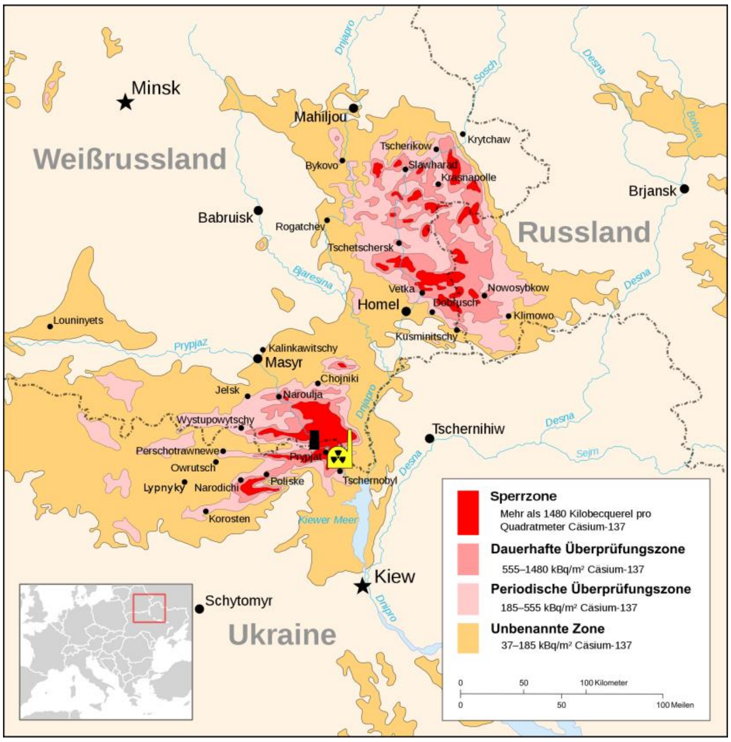
2. Die Population einer Tierart wächst pro Jahr um 1,2%.
   a) Beschreiben Sie die Anzahl der Tiere mit Hilfe einer geeigneten Funktion.
   b) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der Tiere in 10 Jahren zu?
   c) Versuchen Sie herauszufinden, nach wie vielen Jahren sich die Anzahl der Tiere verdoppeln wird.
   Welche Gleichung muss man dazu lösen können? Wie könnte man dieses Problem „lösen“?

3. Bestimmen Sie jeweils den Funktionsterm einer Exponentialfunktion, die durch die beiden angegebenen Punkte geht.

   a) (0 / 2) und (4 / 4) b) (1 / 2) und (2 / 5)
   c) (-1 / 2) und (1 / 6) d) (-1 / 6) und (1 / 2)

4. Die Bevölkerung eines Landes ist in 10 Jahren von 56,5 Millionen auf gegenwärtig 60,8 Millionen gewachsen.
   a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl mit Hilfe einer geeigneten Funktion.
   b) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Zuwachsrate?

5. Bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl wurden etwa 26,4 kg radioaktives Cäsium (Betastrahler) freigesetzt.
   Die Halbwertzeit von Cäsium 137 beträgt 30 Jahre.
   a) Geben Sie die Masse m(t) der noch nicht zerfallenen Cäsiumatomkerne an.
   b) Welcher Prozentsatz an Cäsium zerfällt jährlich?
   c) Schätzen Sie, nach welcher Zeit 95% des radioaktiven Cäsiums zerfallen sind.



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Die Exponentialfunktion

1. a) $A(t) = A_o \cdot (1+3,5\%)^{\frac{t}{15\,\text{min}}} = A_o \cdot (1,035)^{\frac{t}{15\,\text{min}}}$

   b) $A(24h) = A_o \cdot 1,035^{\frac{24\cdot 60\,\text{min}}{15\,\text{min}}} = A_o \cdot 1,035^{96} \approx 27,18\,A_o$

   Die Zunahme beträgt also 26,18 A_o und damit ca. 2618 % .

2. a) $N(t) = N_o \cdot (1+1,2\%)^{\frac{t}{1a}} = N_o \cdot (1,012)^{\frac{t}{1a}}$

   b) $N(10a) = N_o \cdot 1,012^{\frac{10a}{1a}} = N_o \cdot 1,012^{10} = 1,1266...\ N_o \approx 1,127\,N_o$

   In 10 Jahren nimmt die Anzahl der Tiere um ca. 12,7% zu.

   c) $N(t_1) = 2\cdot N \;\Leftrightarrow\; 2\cdot N_o = N_o \cdot 1,012^{\frac{t_1}{1a}} \;\Leftrightarrow\; 1,012^{\frac{t_1}{1a}} = 2$ mit $x = \dfrac{t_1}{1a}$ also $1,012^x = 2$

   durch Probieren findet man: $x \approx 58$, denn $1,012^{58} = 1,997...$ und $1,012^{59} = 2,021...$

   also $t_1 \approx 58\cdot 1a = 58\,a$

   [Hinweis: Die Gleichung $1,012^x = 2$ hat die Lösung $x = \log_{1,012}(2) = 58,1081...$]

3. a) $f(x) = a\cdot b^x$; sind $(0/2)$ und $(4/4)$ Punkte des Graphen von f, so gilt

   (1) $2 = a\cdot b^0$ und (2) $4 = a\cdot b^4$ also $\dfrac{4}{2} = \dfrac{a\cdot b^4}{a\cdot b^0} \;\Leftrightarrow\; 2 = b^4$ also $b = \sqrt[4]{2} = 1,1892...$

   und $2 = a$ also $f(x) = 2\cdot(\sqrt[4]{2})^x = 2\cdot(2^{0,25})^x = 2\cdot 2^{0,25\cdot x}$

   b) $f(x) = a\cdot b^x$; sind $(1/2)$ und $(2/5)$ Punkte des Graphen von f, so gilt

   (1) $2 = a\cdot b^1$ und (2) $5 = a\cdot b^2$ also $\dfrac{5}{2} = \dfrac{a\cdot b^2}{a\cdot b^1} \;\Leftrightarrow\; 2,5 = b$ und

   $2 = a\cdot 2,5 \;\Leftrightarrow\; a = 0,8$ also $f(x) = 0,8\cdot 2,5^x$

   c) $f(x) = a\cdot b^x$; sind $(-1/2)$ und $(1/6)$ Punkte des Graphen von f, so gilt

   (1) $2 = a\cdot b^{-1}$ und (2) $6 = a\cdot b$ also $\dfrac{6}{2} = \dfrac{a\cdot b}{a\cdot b^{-1}} \;\Leftrightarrow\; 3 = b^2 \;\Leftrightarrow\; b = \sqrt{3}$

   und $a = 2\cdot b = 2\cdot\sqrt{3}$ also $f(x) = 2\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3})^x = 2\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{0,5x}$

   d) $f(x) = a\cdot b^x$; sind $(-1/6)$ und $(1/2)$ Punkte des Graphen von f, so gilt

   (1) $6 = a\cdot b^{-1}$ und (2) $2 = a\cdot b$ also $\dfrac{2}{6} = \dfrac{a\cdot b}{a\cdot b^{-1}} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{3} = b^2 \;\Leftrightarrow\; b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   und $a = 6\cdot b = 2\cdot\sqrt{3}$ also $f(x) = 2\cdot\sqrt{3}\cdot(\dfrac{\sqrt{3}}{3})^x = 2\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{-0,5x}$

4. Zum Zeitpunkt $t_o = 0$ soll die Bevölkerungszahl $56{,}5 \cdot 10^6$ betragen,
zum Zeitpunkt $t_1 = 10a$ damit $60{,}8 \cdot 10^6$.

a) $N(t) = N_o \cdot b^{\frac{t}{1a}}$ und $N_o = 56{,}5 \cdot 10^6$ und $N(10a) = 60{,}8 \cdot 10^6$

also $60{,}8 \cdot 10^6 = 56{,}5 \cdot 10^6 \cdot b^{\frac{10a}{1a}} \Leftrightarrow b^{10} = \dfrac{60{,}8}{56{,}5} \Leftrightarrow b = \sqrt[10]{\dfrac{608}{565}} = 1{,}007361... \approx 1{,}00736$

und damit $N(t) = 56{,}5 \cdot 10^6 \cdot \left(\sqrt[10]{\dfrac{608}{565}}\right)^{\frac{t}{1a}}$

b) wegen $N(1a) = N_o \cdot b^1 \approx 1{,}00736 \cdot N_o$ beträgt die jährliche Zuwachsrate $0{,}736\%$.

5. a) $m(t) = m_o \cdot 0{,}5^{\frac{t}{30a}} = 26{,}4kg \cdot 2^{\frac{-t}{30a}}$

b) $m(1a) = m_o \cdot 2^{-\frac{1a}{30a}} = 0{,}977159... \cdot m_o \approx 0{,}9772 \cdot m_o$

Jährlich zerfallen damit etwa $1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 = 2{,}28\%$ des Cäsliums.

Täglich zerfallen also etwa 8,3% des radioaktiven Iods 131.

c) $m(t_1) = 0{,}05 m_o \Leftrightarrow 0{,}05 m_o = m_o \cdot 0{,}5^{\frac{t_1}{30a}} \Leftrightarrow 0{,}05 = 2^{\frac{-t_1}{30a}}$ mit $x = \dfrac{t_1}{30a}$ also

$0{,}05 = 2^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{0{,}05} = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 20$

durch Probieren: $x \approx 4{,}32$, denn $2^{4,32} = 19{,}97...$ und $2^{4,33} = 20{,}11...$

und somit $t_1 \approx 4{,}32 \cdot 30a \approx 130a$

[Hinweis: $2^x = 20$ hat die exakte Lösung $x = \log_2(20) = 4{,}321928...$]