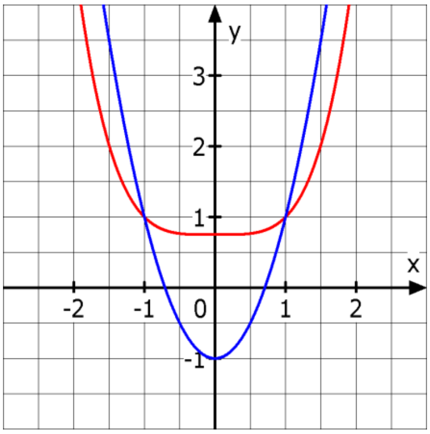
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Schnittpunkte von Graphen

1. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 0{,}25 \cdot x^4 + 0{,}75$ und $g(x) = 2x^2 - 1$.



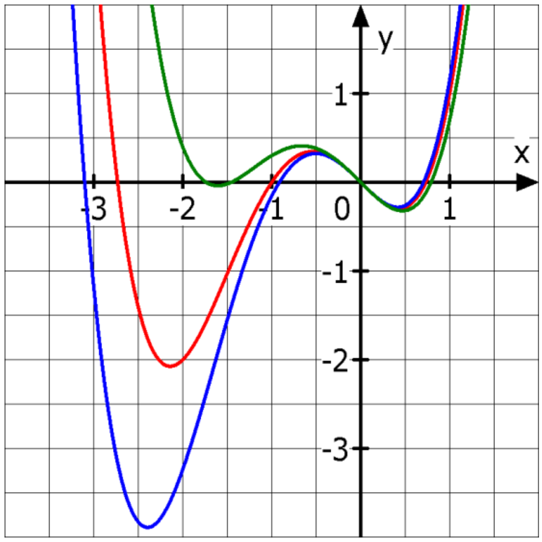
   a) Wie viele Schnittpunkte können die beiden Graphen maximal haben

   b) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte mit Hilfe einer geeigneten Polynomdivision.

   c) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

2. Das Bild zeigt drei Graphen der so genannten Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 + k \cdot x^3 - x \quad \text{mit} \quad k \in R \; .$$



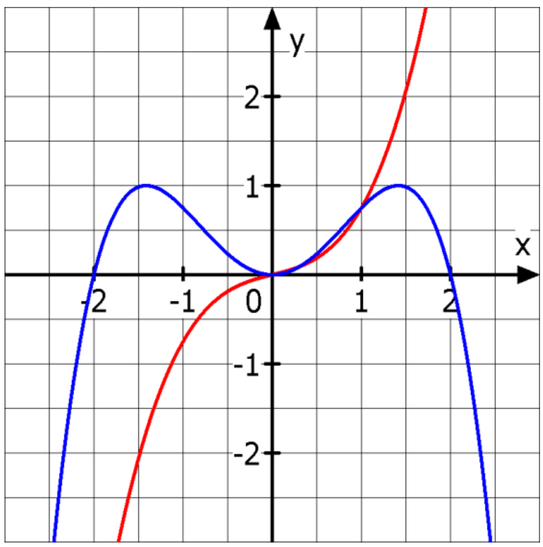
Der rote Graph hat ersichtlich eine Nullstelle bei $x_1 = -1$.

Bestimmen Sie für den roten Graph den Wert des zugehörigen k.

Berechnen Sie nun alle restlichen Nullstellen der Funktion mit dem roten Graphen.

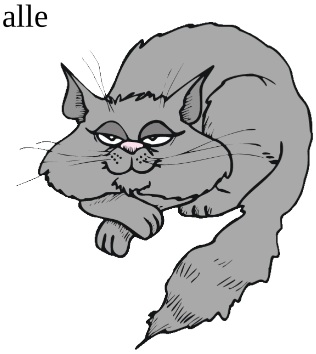
3. Das Bild zeigt die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^4 + x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x \; .$$



   a) Welche Funktion gehört zum roten Graphen? In wie vielen Schnittpunkten schneiden sich offensichtlich die beiden Graphen?

   b) Bestimmen Sie nun alle Schnittpunkte der beiden Graphen!



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Schnittpunkte von Graphen * Lösungen

1. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 + 0,75 = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75 = 0$
Diese Gleichung kann maximal 4 Lösungen haben. Es gibt also maximal 4 Schnittpunkte.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75 = 0$
Offensichtlich sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Lösungen dieser Gleichung, weil sich die beiden Graphen in den Punkten (-1/1) und (1/1) schneiden.
$(0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75) : (x^2 - 1) = 0,25x^2 - 1,75$
Also $(0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75) = (x^2 - 1) \cdot (0,25x^2 - 1,75) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 7)$
Die weiteren Schnittpunkte liegen also bei $x_{3/4} = \pm\sqrt{7}$.
Die vier Schnittpunkte lauten also $(-1/1)$, $(1/1)$, $(-\sqrt{7}/13)$ und $(\sqrt{7}/13)$.

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25 \cdot x^4 - 2x^2 + 1,75 = 0$ Substitution $u = x^2$
$0,25 \cdot u^2 - 2u + 1,75 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 8u + 7 = 0 \Leftrightarrow (u-1) \cdot (u-7) = 0 \Leftrightarrow$
$u_1 = 1$ und $u_2 = 7$ also $x^2 = 1$ bzw. $x^2 = 7$ und daher $x_{1/2} = \pm 1$; $x_{3/4} = \pm\sqrt{7}$

2. $f_k(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (-1)^4 + k \cdot (-1)^3 - (-1) = 0 \Leftrightarrow k = -1,5$
Nullstellen von $f_{1,5}(x)$: $0 = \frac{1}{2} \cdot x^4 + 1,5 \cdot x^3 - x \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^3 + 3x^3 - 2)$
$0 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x^3 + 3x^3 - 2) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 2x - 2)$
Die Nullstellen lauten damit $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{3}$

3. a) Der rote Graph gehört zu g(x).
3 Schnittpunkte sind erkennbar (bei 0 und 1 und bei etwa 0,25),
aber es gibt auch noch einen Schnittpunkt im Bereich $x < -2$.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + x^2 = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{4} \cdot x = 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1}{4} \cdot x \cdot (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_{3/4} = \frac{1}{2} \cdot (-3 \pm \sqrt{13})$ $(x_3 \approx 0,30$; $x_4 \approx -3,30)$
Schnittpunkte $(0/0)$; $(1 / 0,75)$; $\approx (0,30 / 0,17)$; $\approx (-3,30 / -19,67)$