Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Test zu den Lerninhalten der 10. Jahrgangsstufe

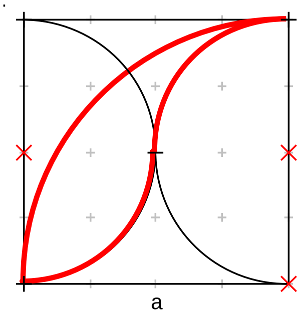
1. Bestimmen Sie <u>alle</u> Lösungen der Gleichung mit $x \in [0\,;\,2\pi]$.

   a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. Die rot umrandete Figur ist einem Quadrat der Kantenlänge a einbeschrieben.

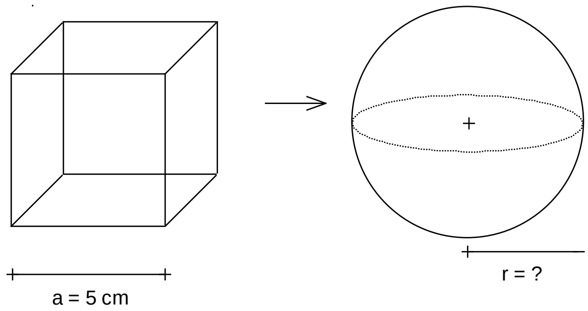
   a) Berechnen Sie den Umfang dieser Figur in Vielfachen der Kantenlänge a.

   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Figur als Prozentsatz von a^2.



3. Ein Bleiwürfel der Kantenlänge $a = 5{,}0\text{cm}$ wird in eine Kugel mit dem Radius r umgeschmolzen.

   Berechnen Sie den Radius r der Bleikugel!



4. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen und vereinfachen Sie.

   $\log_2 x^2 - \log_2 \sqrt{x}$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung.

   $3^x + 3^{3-x} = 12$

6. Ein umweltschädliches Gas nimmt jährlich um 1,7% zu.
   Zum Jahresanfang 2008 betrug die Konzentration dieses Gases 0,28 ppm (parts per million).
   a) Welche Gaskonzentration herrschte zu Beginn des Jahres 2014?
   b) In welchem Jahr ist eine Gaskonzentration von 0,40 ppm zu erwarten?

7. Zeigen Sie, dass die ganzrationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 2$ die Nullstelle $x_1 = 2$ besitzt und berechnen Sie dann alle restlichen Nullstellen von f.

8. Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 0{,}2\,x^2 \cdot (3-x) \cdot (x+1)$.
   Geben Sie alle Nullstellen von h an und prüfen Sie das Verhalten von h(x) für $x \to +\infty$.
   Skizzieren Sie dann qualitativ den Graphen von h.

9. Jedes neunte Überraschungsei einer bekannten Firma enthält eine Figur.

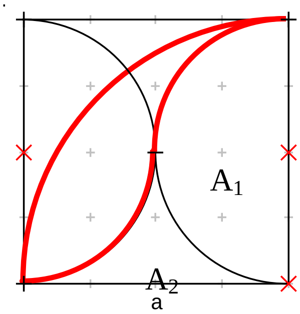
   Peter möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens eine diese Figuren bekommen.
   Wie viele Überraschungseier muss Peter dann mindestens kaufen?

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Test zu den Lerninhalten der 10 Jahrgangsstufe * Lösungen

1. a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; wegen $\cos(30^o) = \cos(330^o) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt also $x_1 = \frac{\pi}{6}$ und $x_2 = \frac{11\pi}{6}$

   b) $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; wegen $\sin 225^o = \sin 315^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ folgt also $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{7\pi}{4}$

2. a) $U = \frac{1}{4}\cdot 2\pi a + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi\frac{a}{2} = \pi\cdot a \approx 3{,}14\,a$



   b) $A = \frac{1}{4}\cdot a^2\pi - A_1 - A_2 =$

$$\frac{1}{4}\cdot a^2\pi - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi\right) =$$

$$\frac{1}{4}\cdot a^2\pi - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi\right) = \frac{1}{8}\cdot a^2\pi - \frac{1}{2}\cdot a^2 + \frac{1}{8}\cdot a^2\pi = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})\cdot a^2 \approx 0{,}285\,a^2$$

3. $a^3 = \frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{3}{4\cdot\pi}\,a^3 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\cdot\pi}}\cdot 5{,}0\,\text{cm} = 3{,}1017...\text{cm} \approx 3{,}1\,\text{cm}$

4. $\log_2 x^2 - \log_2\sqrt{x} = \log_2\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \log_2 x^{2-0{,}5} = \log_2 x^{1{,}5} \quad (= 1{,}5\cdot\log_2 x)$

5. $3^x + 3^{3-x} = 12 \;\Leftrightarrow\; 3^x + \frac{3^3}{3^x} - 12 = 0$ Substitution $u = 3^x$ also

   $u + \frac{27}{u} - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; u^2 - 12u + 27 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u-9)\cdot(u-3) = 0 \;\Leftrightarrow\; u_1 = 9\,;\; u_2 = 3$ also

   $3^{x_1} = 9$ d.h. $x_1 = 2$ und $3^{x_2} = 3$ d.h. $x_2 = 1$

6. a) $G(j) = 0{,}28\,\text{ppm}\cdot 1{,}017^{\,j-2008}$ mit j = Jahreszahl

   oder $G(t) = 0{,}28\,\text{ppm}\cdot 1{,}017^{\frac{t}{1a}}$ mit t = Zeit, die seit Jahresanfang 2008 vergangen ist.

   $G(2014) = 0{,}28\,\text{ppm}\cdot 1{,}017^{2014-2008} = 0{,}28\,\text{ppm}\cdot 1{,}017^6 \approx 0{,}31\,\text{ppm}$

   b) $G(j) = 0{,}40\,\text{ppm} \;\Leftrightarrow\; 0{,}40\,\text{ppm} = 0{,}28\,\text{ppm}\cdot 1{,}017^{\,j-2008} \;\Leftrightarrow\; \frac{40}{28} = 1{,}017^{\,j-2008} \;\Leftrightarrow$

   $\lg\frac{40}{28} = (j-2008)\cdot\lg 1{,}017 \;\Leftrightarrow\; j - 2008 = \frac{\lg 40 - \lg 28}{\lg 1{,}017} \;\Leftrightarrow$

   $j = 2008 + \frac{\lg 50 - \lg 28}{\lg 1{,}017} = 2008 + 21{,}15... \approx 2029$

7. $f(2) = 2^3 - 5\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 2 = 8 - 20 + 10 + 2 = 0$
also ist $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f.

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow$
$(x-2)\cdot(x^2 - 3x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow$
$x_1 = 2$ oder $x^2 - 3x - 1 = 0 \;\Rightarrow$
$x_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot(+3 \pm \sqrt{9+4}\,) = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

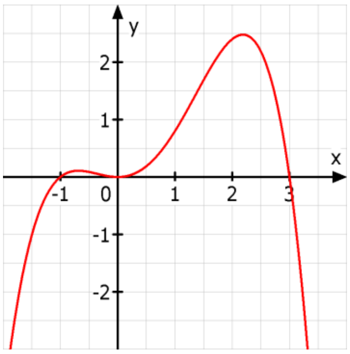
Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 5x + 2) : (x-2) = x^2 - 3x - 1 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad -3x^2 + 5x + 2 \\
\qquad \underline{-(3x^2 + 6x)} \\
\qquad\qquad - x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(-x + 2)} \\
\qquad\qquad\quad - \; -
\end{array}
$$

8. $h(x) = 0{,}2x^2\cdot(3-x)\cdot(x+1)$ hat die Nullstellen
$x_1 = -1$, $x_2 = 0$ (doppelte NSt.) und $x_3 = 3$

für $x \to +\infty$ gilt $h(x) \to "\infty^2 \cdot (-\infty)\cdot\infty" = -\infty$

Der Graph von h geht bei x_1 und x_3
durch die x-Achse, bei x_2 dagegen wird
die x-Achse vom Graphen nur berührt.



9. $1 - (1 - \frac{1}{9})^n \ge 90\% \;\Leftrightarrow\; 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n \ge 0{,}90 \;\Leftrightarrow\; 0{,}10 \ge \left(\frac{8}{9}\right)^n \;\Leftrightarrow\; \lg 0{,}10 \ge \lg\left(\frac{8}{9}\right)^n \;\Leftrightarrow$

$\lg 0{,}10 \ge n\cdot\lg\left(\frac{8}{9}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{\lg 0{,}10}{\lg\left(\frac{8}{9}\right)} \le n \;\Leftrightarrow\; n \ge 19{,}5...$

Peter muss also mindestens 20 Überraschungseier kaufen.

Schöne Sommerferien!