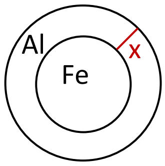
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu Kugelvolumen und Kugeloberfläche

1. a) Bestimmen Sie die Masse einer Kugel mit Radius 4,0cm , die vollständig aus Eisen bzw. Aluminium besteht. Die Dichte von Eisen beträgt $7{,}86\ g/cm^3$, die Dichte von Aluminium dagegen nur $2{,}70\ g/cm^3$.

   b) Eine Kugel mit Radius 4,0cm soll genau 1000 g Masse besitzen und aus einer inneren Eisenkugel und einem Mantel aus Aluminium aufgebaut sein. Wie dick muss dabei der Aluminiummantel sein?



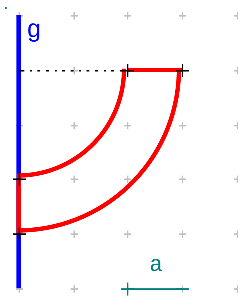
2. Einer Kugel mit Radius r soll ein möglichst großer Würfel der Kantenlänge a einbeschrieben werden.

   a) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen r und a !
   (Hinweis: Welche Strecke im Würfel entspricht genau einem Durchmesser der Kugel?)

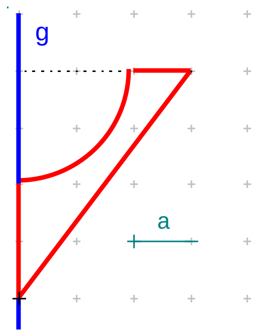
   b) Wie viel Prozent des Kugelvolumens macht das Volumen dieses Würfels aus?

3. Durch Rotation des dargestellten rot umrandeten Flächenstücks um die Achse g entsteht ein rotationssymmetrischer Körper.
   Bestimmen Sie jeweils das Volumen und den Oberflächeninhalt dieses „Rotationskörpers" in den Einheiten a^3 bzw. a^2.
   (Für die Mantelfläche A eines Kegels gilt $A_{Mantel} = r \cdot \pi \cdot m$, wobei m die Länge der Mantellinie ist.)

   a)



   b)



4. München hat die geographischen Koordinaten $48{,}1^o$ nördlich und $11{,}6^o$ östlich Greenwich. Der Erdradius beträgt 6370 km.

   a) Bestimmen Sie die geographischen Koordinaten des Ortes, den man erreicht, wenn man sich exakt 1000 km in Richtung Süden bzw. in Richtung Westen bewegt.

   New York hat die geographischen Koordinaten $42{,}5^o$ nördlich und $73{,}6^o$ westlich Greenwich. Peter will die Länge der Strecke von München auf zwei unterschiedlichen Wegen ermitteln und vergleichen. Welcher Weg wird wohl länger sein?

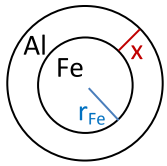
   b) Wie lang ist die Wegstrecke von München nach New York, wenn man sich zuerst auf einem Längengrad und dann auf einem Breitengrad bewegt?

   c) Wie lang ist die Wegstrecke von München nach New York, wenn man sich zuerst auf einem Breitengrad und dann auf einem Längengrad bewegt?

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu Kugelvolumen und Kugeloberfläche
Lösungen

1. a) $m_{Fe} = V \cdot \rho_{Fe} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \rho_{Fe} = \frac{4}{3} \cdot (4{,}0\,\text{cm})^3 \cdot \pi \cdot 7{,}86 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 2107\,\text{g}$

$m_{Al} = V \cdot \rho_{Al} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \rho_{Fe} = \frac{4}{3} \cdot (4{,}0\,\text{cm})^3 \cdot \pi \cdot 2{,}70 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 724\,\text{g}$



b) Der Radius der Eisenkugel wird mit r_{Fe} bezeichnet.
Es gilt dann $r_{Fe} + x = 4{,}0\,\text{cm}$.

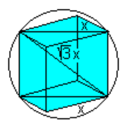
$m_{Fe} = \frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot \rho_{Fe}$ und $m_{Al} = 724\,\text{g} - \frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot \rho_{Al}$

Aus $m_{Fe} + m_{Al} = 1000\,\text{g}$ folgt $\frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot \rho_{Fe} + 724\,\text{g} - \frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot \rho_{Al} = 1000\,\text{g}$ also

$\frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot \rho_{Fe} - \frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot \rho_{Al} = 276\,\text{g} \iff \frac{4}{3} \cdot r_{Fe}^{\ 3} \cdot \pi \cdot (\rho_{Fe} - \rho_{Al}) = 276\,\text{g} \iff$

$r_{Fe}^{\ 3} = \dfrac{3 \cdot 276\,\text{g}}{4 \cdot \pi \cdot (7{,}86 - 2{,}70) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 12{,}76...\,\text{cm}^3 \Rightarrow r_{Fe} = 2{,}337...\,\text{cm} \approx 2{,}34\,\text{cm}$ und $x \approx 1{,}66\,\text{cm}$

2. a) Die Raumdiagonale im Würfel entspricht dem Durchmesser der Kugel, d.h.

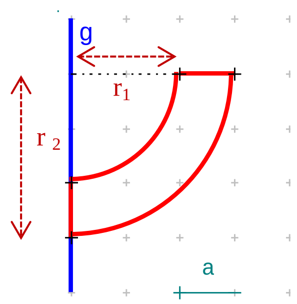


$\sqrt{3} \cdot a = 2 \cdot r$ also $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r$

b) $V_{Würfel} = a^3 = (\frac{2\sqrt{3}}{3}\, r)^3 = \frac{8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{27}\, r^3 = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9}\, r^3$ und $V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi$

$V_{Würfel} : V_{Kugel} = (\frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9}\, r^3) : (\frac{4}{3} r^3 \pi) = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{9 \cdot 4 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \pi} = 0{,}3675... \approx 36{,}8\%$

3. a) $r_1 = 2a$ und $r_2 = 3a$ (siehe Bild!)



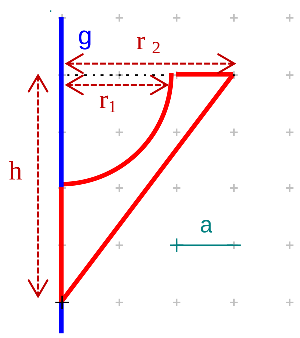
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} r_2^{\ 3} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r_1^{\ 3} \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} (r_2^{\ 3} + r_1^{\ 3}) \cdot \pi =$

$\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (27a^3 - 8a^3) = \frac{38}{3} \pi \cdot a^3 \approx 39{,}8\,a^3$

$A = \frac{1}{2} \cdot 4 r_2^{\ 2} \pi + \frac{1}{2} \cdot 4 r_1^{\ 2} \pi + r_2^{\ 2} \pi - r_1^{\ 2} \pi =$

$3 r_2^{\ 2} \pi + r_1^{\ 2} \pi = 27a^2\pi + 4a^2\pi = 31 \cdot \pi \cdot a^2 \approx 97{,}4\,a^2$

b) $r_1 = 2a$ und $r_2 = 3a$ und $h = 4a$ (siehe Bild!)



$V = \frac{1}{3} \cdot r_2^{\ 2} \pi \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} r_1^{\ 3} \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot 9a^2 \pi \cdot 4a - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} 8a^3 \cdot \pi =$

$12a^3\pi - \frac{16}{3} a^3 \pi = \frac{20}{3} \pi \cdot a^3 \approx 20{,}9\,a^3$

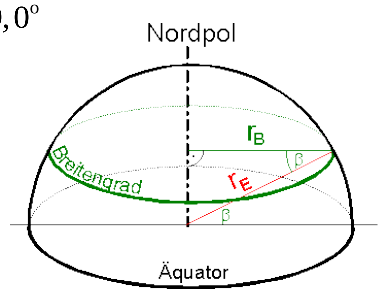
$A = \frac{1}{2} \cdot 4 r_1^{\ 2} \pi + (r_2^{\ 2} \pi - r_1^{\ 2} \pi) + r_2 \cdot \pi \cdot \sqrt{h^2 + r_2^{\ 2}} =$

$r_2^{\ 2} \pi + r_1^{\ 2} \pi + r_2 \cdot \pi \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}\, a = 9a^2 \pi + 4a^2 \pi + 3a \cdot \pi \cdot 5a =$

$28 \pi \cdot a^2 \approx 88{,}0\ a^2$

4. a) In Richtung Süden geht man auf einem Längenkreis (Radius = Erdradius).

Aus $\frac{\Delta\varphi}{360^\circ} = \frac{1000\,\text{km}}{2r_{\text{Erde}}\pi}$ folgt $\Delta\varphi = \frac{360^\circ \cdot 1000\,\text{km}}{2 \cdot 6370\text{km} \cdot \pi} = 8{,}994...^\circ \approx 9{,}0^\circ$



Die Koordinaten des Zielortes lauten damit:
$11{,}6^\circ$ östlich und $48{,}1^\circ - 9{,}0^\circ = 39{,}1^\circ$ nördlich.

Für den Breitenkreisradius r_B zur geographischen Breite ß gilt

$\cos ß = \frac{r_B}{r_{\text{Erde}}}$ also $r_B = r_{\text{Erde}} \cdot \cos ß = 6370\,\text{km} \cdot \cos 48{,}1^\circ = 4254\,\text{km}$

aus $\frac{\Delta\lambda}{360^\circ} = \frac{1000\,\text{km}}{2r_B\pi}$ folgt $\Delta\lambda = \frac{360^\circ \cdot 1000\,\text{km}}{2 \cdot 4254\text{km} \cdot \pi} = 13{,}46...^\circ \approx 13{,}5^\circ$

In Richtung Westen erreicht man daher die geographische Länge $11{,}6^\circ - 13{,}5^\circ = -1{,}9^\circ$, d.h. $1{,}9^\circ$ westlich Greenwich.

b) In Richtung Süden zunächst auf einem Längenkreis:

$\Delta\varphi = 48{,}1^\circ - 42{,}5^\circ = 5{,}6^\circ$ und $x_1 = \frac{\Delta\varphi}{360^\circ} \cdot 2r_{\text{Erde}}\pi = \frac{5{,}6^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 6370\text{km} \cdot \pi \approx 623\,\text{km}$

In Richtung Westen auf einem Breitenkreis zur geographischen Breite $42{,}5^\circ$ nördlich:

$r_B = r_{\text{Erde}} \cdot \cos ß = 6370\,\text{km} \cdot \cos 42{,}5^\circ = 4696\,\text{km}$

$\Delta\lambda = 73{,}6^\circ - (-11{,}6^\circ) = 85{,}2^\circ$ und $x_2 = \frac{\Delta\lambda}{360^\circ} \cdot 2r_B\pi = \frac{85{,}2^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 4696\text{km} \cdot \pi \approx 6983\text{km}$

Der gesamte Weg hat also die Länge $623\,\text{km} + 6983\text{km} = 7606\,\text{km}$

c) In Richtung Westen zunächst auf einem Breitenkreis: (Radius $r_B = 4254$ km)

$\Delta\lambda = 73{,}6^\circ - (-11{,}6^\circ) = 85{,}2^\circ$ und $x_1 = \frac{\Delta\lambda}{360^\circ} \cdot 2r_B\pi = \frac{85{,}2^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 4254\text{km} \cdot \pi \approx 6326\text{km}$

In Richtung Süden auf einem Längenkreis:

$\Delta\varphi = 48{,}1^\circ - 42{,}5^\circ = 5{,}6^\circ$ und $x_1 = \frac{\Delta\varphi}{360^\circ} \cdot 2r_{\text{Erde}}\pi = \frac{5{,}6^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 6370\text{km} \cdot \pi \approx 623\,\text{km}$

Der gesamte Weg hat also die Länge $6326\text{km} + 623\,\text{km} = 6949\,\text{km}$