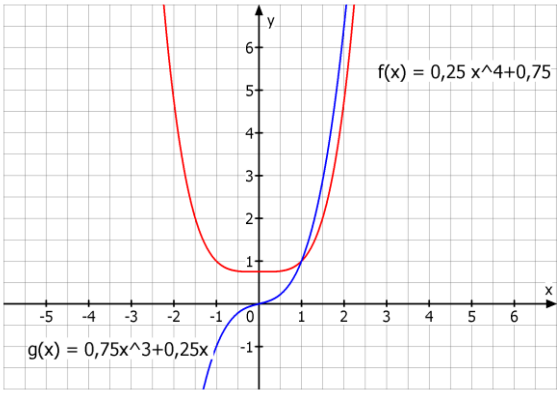
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Zwei Aufgaben zur Polynomdivision

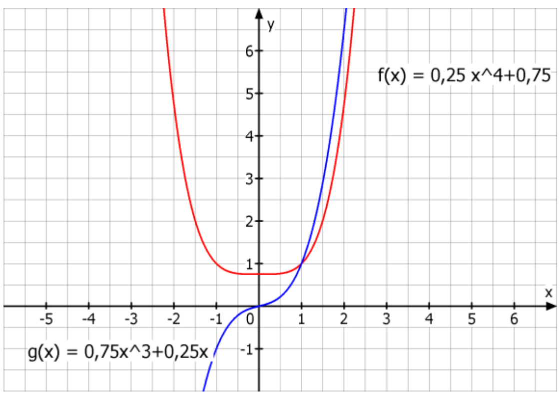
1. Bestimme alle Schnittpunkte der beiden abgebildeten Graphen mit den angegebenen Funktionstermen.



2. Die beiden Funktionen f und g mit
   $f(x) = x^4 - 2x^2$ und $g(x) = -2x^3 + 3x + k$
   sollen sich im Punkt $S_1(-2\,/\ldots)$ schneiden.
   Bestimmen Sie den passenden Wert für k und zeigen Sie, dass es einen weiteren Schnittpunkt S_2 gibt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S_2.

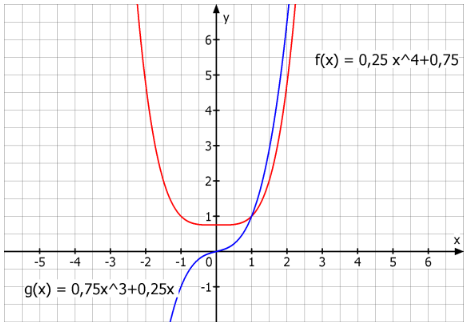
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Zwei Aufgaben zur Polynomdivision

1. Bestimme alle Schnittpunkte der beiden abgebildeten Graphen mit den angegebenen Funktionstermen.



2. Die beiden Funktionen f und g mit
   $f(x) = x^4 - 2x^2$ und $g(x) = -2x^3 + 3x + k$
   sollen sich im Punkt $S_1(-2\,/\ldots)$ schneiden.
   Bestimmen Sie den passenden Wert für k und zeigen Sie, dass es einen weiteren Schnittpunkt S_2 gibt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S_2.

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Zwei Aufgaben zur Polynomdivision * Lösungen



1. Man sieht: $f(1) = g(1)$

   Probe: $f(1) = 0,25 \cdot 1^4 + 0,75 = 0,25 + 0,75 = 1$ und

   $g(1) = 0,75 \cdot 1^3 + 0,25 \cdot 1 = 0,25 + 0,75 = 1$

   $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25x^4 + 0,75 = 0,75x^3 + 0,25x \Leftrightarrow x^4 + 3 = 3x^3 + x \Leftrightarrow$

   $x^4 - 3x^3 - x + 3 = 0$

   Polynomdivision: $(x^4 - 3x^3 - x + 3) : (x - 1) = (x^3 - 2x^2 - 2x - 3)$

   also $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = 1$ oder $x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$

   Mit Probieren: $x_2 = 3$, denn $3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 27 - 18 - 6 - 3 = 0$

   Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 - 2x - 3) : (x - 3) = x^2 + x + 1$

   also $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = 1$ oder $x_2 = 3$ oder $x^2 + x + 1 = 0$

   $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine weiteren Lösungen, denn $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

   $f(3) = 0,25 \cdot 3^4 + 0,75 = 21 = g(3)$

   Die beiden Schnittpunkte lauten also $S_1(1/1)$ und $S_2(3/21)$.

2. $f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 = 16 - 2 \cdot 4 = 8$ also

   $8 = g(-2) = -2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2) + k = +16 - 6 + k = 10 + k \Rightarrow k = -2$

   Also $S_1(-2/8)$ und $g(x) = -2x^3 + 3x - 2$ und $f(x) = x^4 - 2x^2$

   $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = -2x^3 + 3x - 2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$

   Polynomdivision: $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2) : (x + 2) = x^3 - 2x + 1$

   Also $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = -2$ oder $x^3 - 2x + 1 = 0$

   Mit Probieren: $x_2 = 1$ denn $1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$

   Polynomdivision: $(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$

   Also $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x_1 = -2$ oder $x_2 = 1$ oder $x^2 + x + 1 = 0$

   $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine weiteren Lösungen mehr, denn $D = 1 - 4 < 0$

   Mit $f(1) = 1 - 2 = -1 = g(1)$ lauten die beiden Schnittpunkte $S_1(-2/8)$ und $S_2(1/-1)$.