Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

1. Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat bei $x_1 = -1$ eine doppelte und bei $x_2 = 0$ eine einfache Nullstelle. Der Graph der Funktion geht durch die Punkte (1 /– 4) und (– 2 / 14). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Warum kann die Funktion nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein? Geben Sie eine kurze Begründung!

2. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat bei $x_1 = 2$ eine Nullstelle und der Graph geht durch den Punkt (– 1 / 1,5).
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   Besitzt die Funktion weitere Nullstellen?

3. Eine ganzrationale Funktion fünften Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat bei $x_1 = 2$ eine doppelte Nullstelle und der Graph geht durch den Punkt (1 / 3).
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   Welche weiteren Nullstellen muss die Funktion haben?

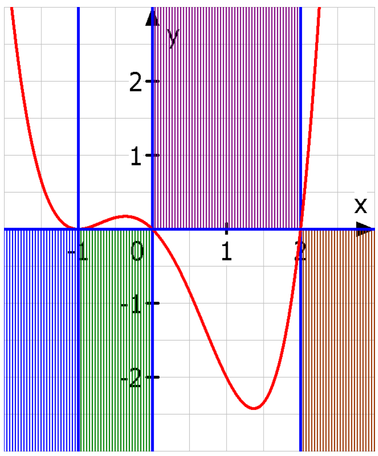
4. Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades geht durch die Punkte (1 / – 4), (– 1 / 6), (0 / 0) und (– 2 / 8). Bestimmen Sie alle Nullstellen dieser Funktion.

5. Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch und hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle. Der Graph geht durch die Punkte (0 / 1,5) und (2 / 1,5).
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und alle weiteren Nullstellen der Funktion.

6. Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}2x^3 + bx^2 - x + 2$ soll bei $x_1 = 2$ eine Nullstelle besitzen. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen der Funktion f.

7. Der Graph einer Funktion f kann schnell skizziert werden, wenn man alle Nullstellen von f kennt.
   Beispiel: $f(x) = 0{,}5 \cdot (x-2) \cdot x \cdot (x+1)^2$
   Zuerst erstellt man eine Tabelle der angegebenen Form, in der man die Vorzeichen der Faktoren von f(x) und dann von f(x) selbst notiert.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$(x+1)^2$	> 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
x	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0
$(x-2)$	< 0	< 0	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
f(x)	> 0	$= 0$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0



Dann kann man im x-y-Koordinatensystem Felder angeben, in denen der Graph von f nicht verlaufen kann. Eine Skizze des Graphen G_f ist nun möglich und auch das Grenzwertverhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$ lässt sich einfach erkennen. Die genaue Lage von Hoch- bzw. Tiefpunkten des Graphen lassen sich natürlich nicht ermitteln!

Skizzieren Sie entsprechend den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 0{,}1 \cdot (x+3) \cdot (x-1) \cdot (x-2)^2$.
Überprüfen Sie mit einem Funktionsplotter Ihre Skizze.

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen * Lösungen

1. Ansatz: $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (ax+b)$

   (1) $f(1) = -4 \;\Leftrightarrow\; -4 = 2^2 \cdot 1 \cdot (a+b) \;\Leftrightarrow\; a+b = -1 \;\Rightarrow\; b = -1-a$

   (2) $f(-2) = 14 \;\Leftrightarrow\; 14 = (-1)^2 \cdot (-2) \cdot (-2a+b) \;\Leftrightarrow\; -2a+b = -7$

   (1) in (2) $-2a-1-a = -7 \;\Leftrightarrow\; -3a = -6 \;\Leftrightarrow\; a = 2$ und $b = -1-2 = -3$

   Also $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (2x-3)$; f kann nicht achsensymmetrisch sein, weil f sonst auch noch eine doppelte Nullstelle bei $x_3 = 1$ haben müsste und damit insgesamt 5 Nullstellen hätte!

2. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$

   (1) $f(2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 8a + 2b \;\Leftrightarrow\; -b = 4a$

   (2) $f(-1) = 1{,}5 \;\Leftrightarrow\; 1{,}5 = -a - b \;\underset{(1)}{\Rightarrow}\; 1{,}5 = -a + 4a \;\Leftrightarrow\; a = 0{,}5$ und $b = -2$

   Also $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$

3. Wegen der Symmetrie hat die Funktion auch bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle, daher der Ansatz: $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)^2 \cdot (ax+b)$

   (1) $f(1) = 3 \;\Leftrightarrow\; (-1)^2 \cdot 3^2 \cdot (a+b) = 3 \;\Leftrightarrow\; 3a+3b = 1 \;\Rightarrow\; 3b = 1 - 3a$

   (2) $f(-1) = -f(1) \;\Leftrightarrow\; (-3)^2 \cdot 1^2 \cdot (-a+b) = -3 \;\Leftrightarrow\; -3a + 3b = -1$

   (1) in (2) $-3a + 1 - 3a = -1 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{3}$ und $b = 0$ also $f(x) = \frac{1}{3} x \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$

4. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   (1) $-4 = a+b+c+d$ (2) $6 = -a+b-c+d$

   (3) $8 = -8a+4b-2c+d$ (4) $0 = d$

   ... $\Rightarrow$ $b = 1$ und $a = 1$ und $c = -6$ also $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

   Nullstellen: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (x^2 + x - 6) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (x+3) \cdot (x-2) = 0$

   Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$

5. Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ und (1) $f(1) = 0$ und (2) $f(0) = 1{,}5$ und (3) $f(2) = 1{,}5$

   (1) $0 = a+b+c$ (2) $1{,}5 = c$ (3) $1{,}5 = 16a + 4b + c$

   ... $\Rightarrow$ $b = -2$ und $a = 0{,}5$ also $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2 + 1{,}5$

   Nullstellen: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0{,}5 \cdot (x^4 - 4x^2 + 3) = 0{,}5 \cdot (x^2 - 3) \cdot (x^2 - 1)$

   Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 1$; $x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$

6. Nullstelle bei $x_1 = 2$, d.h. $0 = 0{,}2 \cdot 8 + 4b - 2 + 2 \;\Rightarrow\; b = -0{,}4$

   $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}4x^2 - x + 2 = 0{,}2 \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 10) = 0{,}2 \cdot (x^2 - 5) \cdot (x - 2)$ Polynomdivision!

   Nullstellen von f: $x_1 = 2$; $x_{2/3} = \pm\sqrt{5}$

7.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$(x + 3)$	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
$(x - 1)$	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0
$(x - 2)^2$	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	$= 0$	> 0
f(x)	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0	$= 0$	> 0