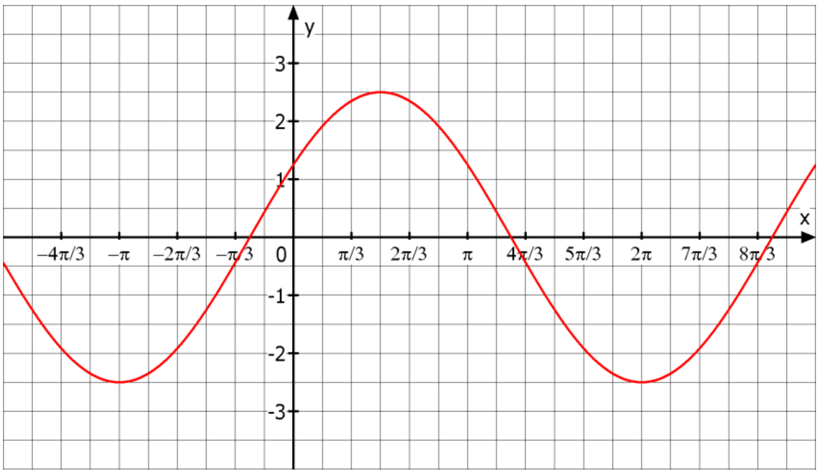
1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 25.01.2017 * Gruppe A

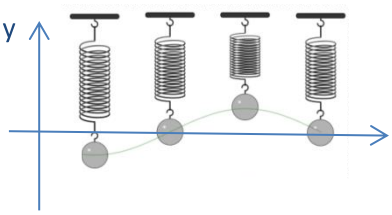
1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\cdot\cos(0{,}5x + \frac{\pi}{3})$ und $x \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie alle Nullstellen dieser Funktion.
   Zeichnen Sie nach einer weiteren Berechnung den Graphen der Funktion sauber in ein Koordinatensystem (im Bereich $-\pi \leq x \leq 3\pi$).

2. Bestimmen Sie für den abgebildeten Graphen einen passenden Sinus-Funktionsterm.
   Die Herleitung des Terms soll nachvollziehbar sein!



3. Peter führt folgenden Versuch mit einem Federpendel durch:
   Er hängt eine Kugel der Masse 200g an eine Stahlfeder.
   Aus der Ruhelage zieht er nun diese Kugel um 8,0cm nach unten und lässt dann die Kugel zum Zeitpunkt $t_o = 0\text{s}$ los.
   Die Kugel führt jetzt eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer 0,60 s aus.



   a) Geben Sie die Auslenkung y aus der Ruhelage als Funktion der Zeit t an.

   b) Zu welchem Zeitpunkt befindet sich die Kugel ein zweites Mal genau 6,0cm unterhalb der Ruhelage? (Hinweis: Ein Skizze des Graphen zu y(t) ist hilfreich!)

Aufgabe	1	2	3a	b	∑
Punkte	10	6	2	4	22

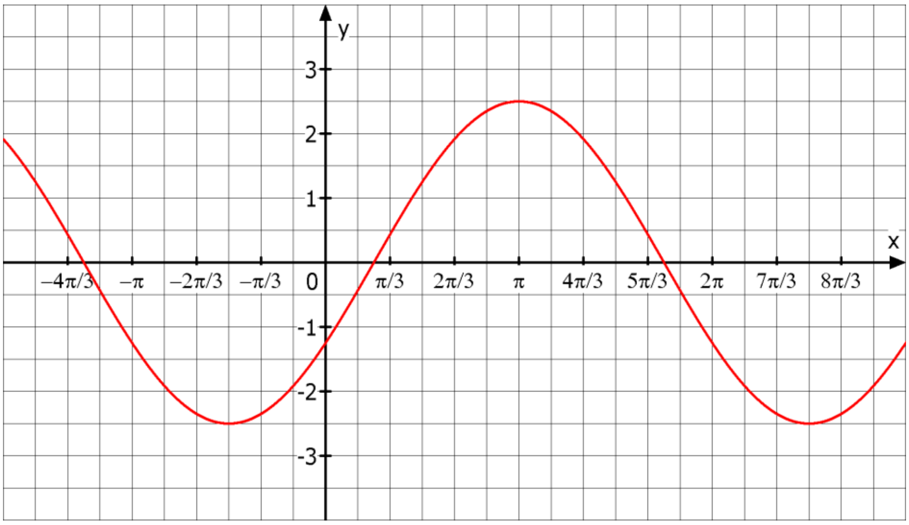
Gutes Gelingen! G.R.

1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 25.01.2017 * Gruppe B

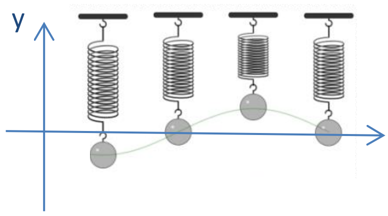
1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\cdot\cos(0{,}5x + \frac{2\pi}{3})$ und $x \in R$.

   Bestimmen Sie alle Nullstellen dieser Funktion.
   Zeichnen Sie nach einer weiteren Berechnung den Graphen der Funktion sauber in ein Koordinatensystem (im Bereich $-\pi \le x \le 3\pi$).

2. Bestimmen Sie für den abgebildeten Graphen einen passenden Sinus-Funktionsterm.
   Die Herleitung des Terms soll nachvollziehbar sein!



3. Peter führt folgenden Versuch mit einem Federpendel durch:
   Er hängt eine Kugel der Masse 100g an eine Stahlfeder.
   Aus der Ruhelage zieht er nun diese Kugel um 6,0cm nach unten und lässt dann die Kugel zum Zeitpunkt $t_o = 0s$ los.
   Die Kugel führt jetzt eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer 0,80 s aus.



   a) Geben Sie die Auslenkung y aus der Ruhelage als Funktion der Zeit t an.

   b) Zu welchem Zeitpunkt befindet sich die Kugel ein zweites Mal genau 4,0cm unterhalb der Ruhelage? (Hinweis: Ein Skizze des Graphen zu y(t) ist hilfreich!)

Aufgabe	1	2	3a	b	∑
Punkte	10	6	2	4	22

Gutes Gelingen! G.R.

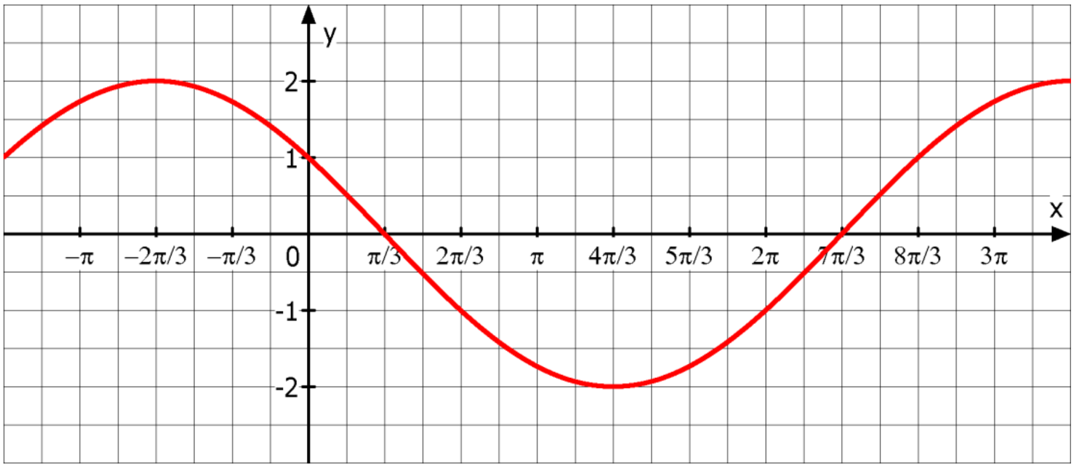
1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 25.01.2017 * Gruppe A * Lösung

1. Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2\cdot\cos(0{,}5x + \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 0{,}5x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}\cdot(2k+1) \Leftrightarrow$

   $0{,}5x = k\cdot\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x_k = 2k\cdot\pi + \frac{2}{6}\cdot\pi = (2k+\frac{1}{3})\cdot\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

   zwei benachbarte Nullstellen: $x_o = \frac{1}{3}\cdot\pi$ und $x_1 = \frac{7}{3}\cdot\pi$ und $\bar{x} = \frac{1}{2}\cdot(x_o + x_1) = \frac{4}{3}\cdot\pi$

   $f(\bar{x}) = 2\cdot\cos(0{,}5\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi + \frac{\pi}{3}) = 2\cdot\cos(\pi) = -2$ und Amplitude $A = 2$



2. Die Amplitude hat den Wert 2,5 und die Periodenlänge beträgt $2\cdot(2\pi - 0{,}5\pi) = 3\pi$.

   Daher $f(x) = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2\pi}{3\pi}\cdot x + c) = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot x + c)$;

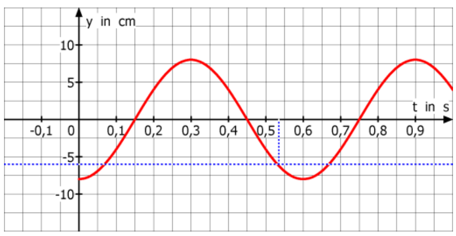
   aus $f(\frac{\pi}{2}) = 2{,}5$ folgt $2{,}5 = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} + c) \Rightarrow 1 = \sin(\frac{\pi}{3} + c)$

   da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ gilt kann man z.B. wählen $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

   also $f(x) = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot x + \frac{\pi}{6})$

3. a) Auslenkung zum Zeitpunkt $t_o = 0$ nach unten, also

   $y(t) = -8{,}0\,\text{cm}\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}\cdot t) = -8{,}0\,\text{cm}\cdot\cos(\frac{2\pi}{0{,}60\,\text{s}}\cdot t)$



   b) Die gesuchte Zeit liegt bei etwa 0,53s.

   $-6{,}0\,\text{cm} = -8{,}0\,\text{cm}\cdot\cos(\frac{2\pi}{0{,}60\,\text{s}}\cdot t_1) \Rightarrow \frac{2\pi}{0{,}60\,\text{s}}\cdot t_1 = \cos^{-1}(\frac{6}{8}) = 0{,}7227... \Rightarrow$

   $t_1 = \frac{0{,}60\,\text{s}}{2\pi}\cdot 0{,}7227... = 0{,}0690...\,\text{s}$ und der gesuchte Zeitpunkt lautet

   $t_{gesucht} = T - t_1 = 0{,}60\,\text{s} - 0{,}0690...\,\text{s} = 0{,}530...\,\text{s} \approx 0{,}53\,\text{s}$

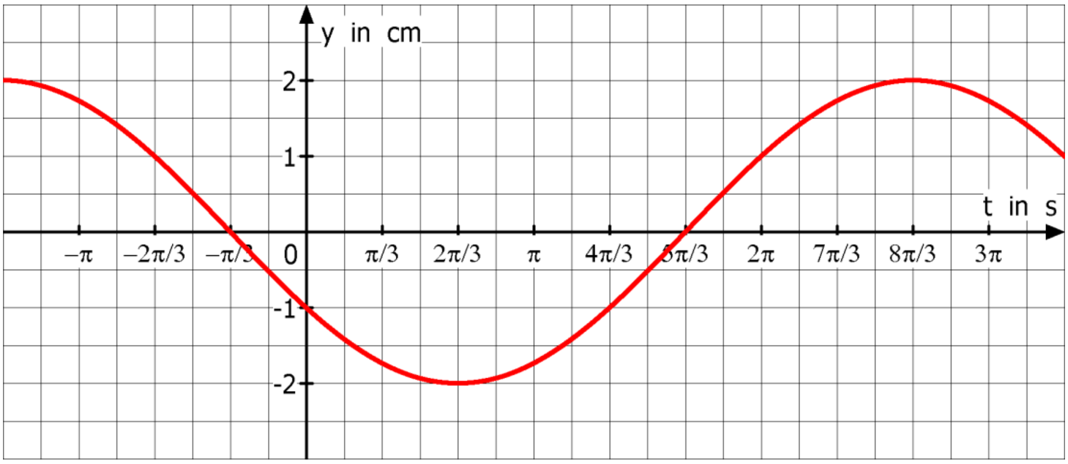
1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 25.01.2017 * Gruppe B * Lösung

1. Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2\cdot\cos(0{,}5x + \frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow 0{,}5x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}\cdot(2k+1) \Leftrightarrow$

$0{,}5x = k\cdot\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x_k = 2k\cdot\pi - \frac{2}{6}\cdot\pi = (2k - \frac{1}{3})\cdot\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

zwei benachbarte Nullstellen: $x_o = -\frac{1}{3}\cdot\pi$ und $x_1 = \frac{5}{3}\cdot\pi$ und $\bar{x} = \frac{1}{2}\cdot(x_o + x_1) = \frac{2}{3}\cdot\pi$

$f(\bar{x}) = 2\cdot\cos(0{,}5\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi + \frac{2\pi}{3}) = 2\cdot\cos(\pi) = -2$ und Amplitude $A = 2$



2. Die Amplitude hat den Wert 2,5 und die Periodenlänge beträgt $2\cdot(\pi - (-0{,}5\pi)) = 3\pi$.

Daher $f(x) = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2\pi}{3\pi}\cdot x + c) = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot x + c)$;

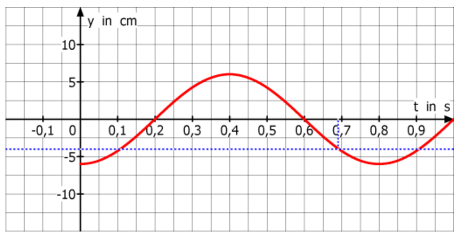
aus $f(\pi) = 2{,}5$ folgt $2{,}5 = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot\pi + c) \Rightarrow 1 = \sin(\frac{2\pi}{3} + c)$

da $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ gilt kann man z.B. wählen $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$

also $f(x) = 2{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot x - \frac{\pi}{6})$

3. a) Auslenkung zum Zeitpunkt $t_o = 0$ nach unten, also

$y(t) = -6{,}0\,\text{cm}\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}\cdot t) = -6{,}0\,\text{cm}\cdot\cos(\frac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}}\cdot t)$



b) Die gesuchte Zeit liegt bei etwa 0,69s.

$-4{,}0\,\text{cm} = -6{,}0\,\text{cm}\cdot\cos(\frac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}}\cdot t_1) \Rightarrow \frac{2\pi}{0{,}80\,\text{s}}\cdot t_1 = \cos^{-1}(\frac{4}{6}) = 0{,}8410... \Rightarrow$

$t_1 = \frac{0{,}80\,\text{s}}{2\pi}\cdot 0{,}8410... = 0{,}1070...\,\text{s}$ und der gesuchte Zeitpunkt lautet

$t_{gesucht} = T - t_1 = 0{,}80\,\text{s} - 0{,}1070...\,\text{s} = 0{,}6929...\,\text{s} \approx 0{,}69\,\text{s}$