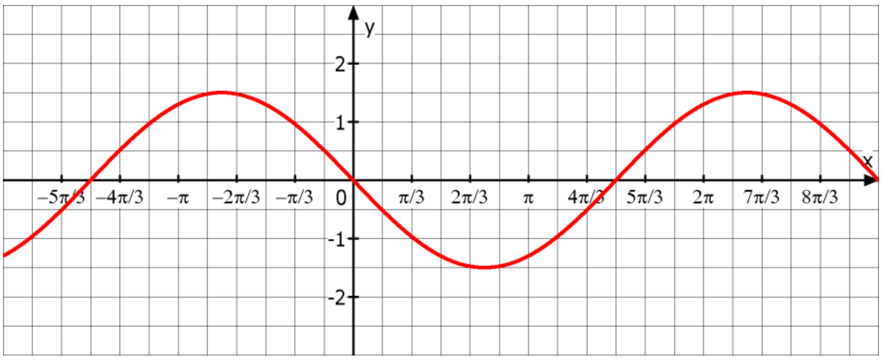
2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.04.2017 * Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.
   Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f und skizzieren Sie den Graph im Bereich $[-\pi\,;\,3\pi]$.

2. a) Das Bild zeigt den Graphen einer Kosinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c)$.
   Bestimmen Sie passende Werte der Parameter a, b und c.
   b) Der Funktionsterm $f(x)$ lässt sich auch als Sinusfunktion $g(x) = d \cdot \sin(e \cdot x + f)$ schreiben.
   Geben Sie passende Werte der Parameter d, e und f an.



3. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der Gleichung.
   Geben Sie am Ende der Rechnung die Lösungen auch auf 2 Dezimalstellen gerundet a

   a) $2 \cdot 3^x = 4^{x-1}$ b) $3 = 2 \cdot \log_4(x-1)$ c) $4^x = 5 + 4 \cdot 2^x$

4. Zur Untersuchung der Schilddrüse wird in der Medizin radioaktives Jod 123 eingesetzt.
   Einem Patienten werden nur wenige Milligramm dieser Substanz injiziert. Durch radioaktiven Zerfall nimmt die Masse m des radioaktiven Jods im Körper des Patienten ab.
   Nach jeweils 13,2 Stunden halbiert sich dabei die Menge des Jods 123.
   a) Geben Sie einen Term für die noch im Körper vorhandene Jod 123 - Masse $m = m(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t an, wenn die Masse m_o zum Zeitpunkt $t_o = 0$ injiziert wurde.
   b) Wie viel Prozent der ursprünglichen Jodmasse sind nach 4,0 Stunden noch im Körper vorhanden?
   c) Wie lange dauert es, bis 90% des radioaktiven Jods im Körper zerfallen sind?

5. In einem Land lebten zu Beginn des Jahres 2000 11,3 Millionen Einwohner.
   In den folgenden 17 Jahren ist die Bevölkerungszahl um 6,4% gestiegen.
   Gehen Sie im Folgenden von exponentiellem Wachstum aus.
   a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl des Landes mit einer geeigneten Funktion.
   b) Wie groß ist die jährliche Steigerungsrate der Bevölkerungszahl?
   c) Mit welcher Bevölkerungszahl hat man für das Land zu Beginn des Jahres 2030 zu rechnen?

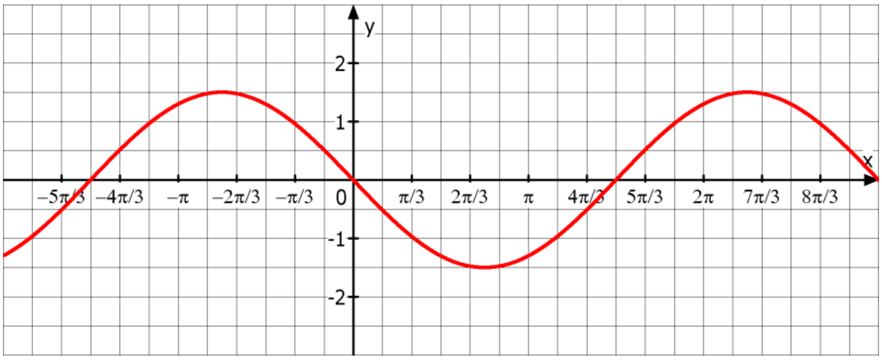
Aufgabe	1	2a	b	3a	b	c	4a	b	c	5a	b	c	∑
Punkte	8	5	3	3	3	5	2	2	4	2	2	3	42

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.04.2017 * Gruppe B

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.
   Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f und skizzieren Sie den Graph im Bereich $[-\pi\,;\,3\pi]$.

2. a) Das Bild zeigt den Graphen einer Kosinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c)$.
   Bestimmen Sie passende Werte der Parameter a, b und c.
   b) Der Funktionsterm $f(x)$ lässt sich auch als Sinusfunktion $g(x) = d \cdot \sin(e \cdot x + f)$ schreiben.
   Geben Sie passende Werte der Parameter d, e und f an.



3. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der Gleichung.
   Geben Sie am Ende der Rechnung die Lösungen auch auf 2 Dezimalstellen gerundet an.

   a) $4 \cdot 3^x = 2^{x+1}$ b) $3 = 2 \cdot \log_4(x+1)$ c) $4^x = 3 + 2 \cdot 2^x$

4. Zur Untersuchung der Schilddrüse wird in der Medizin radioaktives Jod 123 eingesetzt.
   Einem Patienten werden nur wenige Milligramm dieser Substanz injiziert. Durch radioaktiven Zerfall nimmt die Masse m des radioaktiven Jods im Körper des Patienten ab.
   Nach jeweils 13,2 Stunden halbiert sich dabei die Menge des Jods 123.
   a) Geben Sie einen Term für die noch im Körper vorhandene Jod 123 - Masse $m = m(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t an, wenn die Masse m_o zum Zeitpunkt $t_o = 0$ injiziert wurde.
   b) Wie viel Prozent der ursprünglichen Jodmasse sind nach 3,0 Stunden noch im Körper vorhanden?
   c) Wie lange dauert es, bis 80% des radioaktiven Jods im Körper zerfallen sind?

5. In einem Land lebten zu Beginn des Jahres 2000 12,6 Millionen Einwohner.
   In den folgenden 17 Jahren ist die Bevölkerungszahl um 6,2% gestiegen.
   Gehen Sie im Folgenden von exponentiellem Wachstum aus.
   a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl des Landes mit einer geeigneten Funktion.
   b) Wie groß ist die jährliche Steigerungsrate der Bevölkerungszahl?
   c) Mit welcher Bevölkerungszahl hat man für das Land zu Beginn des Jahres 2030 zu rechnen?

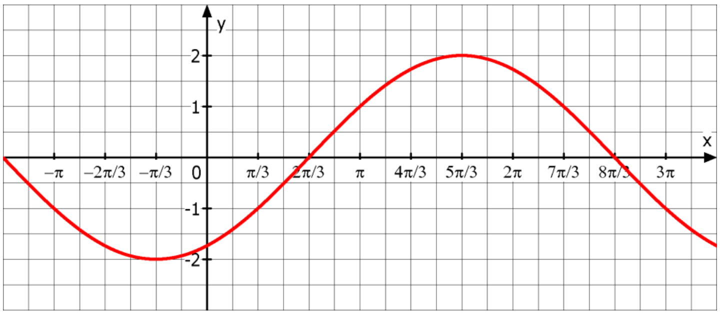
Aufgabe	1	2a	b	3a	b	c	4a	b	c	5a	b	c	∑
Punkte	8	5	3	3	3	5	2	2	4	2	2	3	42

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.04.2017 * Gruppe A * Lösung

1. Nullstellen: $f(x) = 0 \iff 0 = 2\cdot\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) \iff \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = k\cdot\pi$ mit $k \in Z \iff$

$\frac{x}{2} = k\cdot\pi + \frac{\pi}{3} \iff x_k = 2k\cdot\pi + \frac{2\cdot\pi}{3}$;



z.B. $x_o = \frac{2}{3}\pi$ und $x_1 = 2\frac{2}{3}\pi$

$\overline{x} = (x_o + x_1) : 2 = \frac{5}{3}\pi$ und

$f(\overline{x}) = 2\cdot\sin(\frac{5\pi}{2\cdot 3} - \frac{\pi}{3}) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$

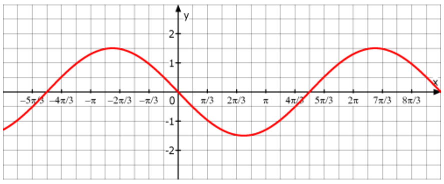
2. a) $a = 1{,}5$ (Amplitude) ; $b = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$; $f(\frac{3}{4}\pi) = -1{,}5$ also wegen $\cos(\pi) = -1$ z.B.

$b\cdot\frac{3}{4}\pi + c = \pi \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi + c = \pi \Rightarrow c = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ insgesamt $f(x) = 1{,}5\cdot\cos(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2})$

b) $d = a = 1{,}5$ und $e = b = \frac{2}{3}$ aber wegen $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ jetzt $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi + f = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$f = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi = \pi$ und daher $f(x) = 1{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}x + \pi)$

oder auch einfacher $f(x) = -1{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}x)$



3. a) $2\cdot 3^x = 4^{x-1} \iff \lg(2) + x\cdot\lg(3) = (x-1)\cdot\lg(4) \iff \lg(2) + \lg(4) = x\cdot(\lg(4) - \lg(3)) \iff$

$x = \frac{\lg(2)+\lg(4)}{\lg(4)-\lg(3)} = \frac{\lg(8)}{\lg(4/3)} = 7{,}2282... \approx 7{,}23$

b) $3 = 2\cdot\log_4(x-1) \iff 1{,}5 = \log_4(x-1) \iff x - 1 = 4^{1,5} \iff x = 1 + 8 = 9$

c) $4^x = 5 + 4\cdot 2^x \iff 2^{2x} = 5 + 4\cdot 2^x$ Substitution $u = 2^x$ also $u^2 - 4\cdot u - 5 = 0$

$(u-5)\cdot(u+1) = 0 \iff u_1 = 5$ ($u_2 = -1 < 0$ liefert keine Lösung für x!)

$2^x = 5 \iff x = \log_2 5 = 2{,}3219... \approx 2{,}32$

4. a) $m(t) = m_o\cdot 0{,}5^{\frac{t}{13,2h}}$

b) $m(4h) = m_o\cdot 0{,}5^{\frac{4,0h}{13,2h}} = m_o\cdot 0{,}8105...$; nach 4 Stunden sind noch etwa 81% im Körper.

c) Sind 90% zerfallen, so sind noch 10% im Körper. Also $m(t) = 0{,}10\,m_o$

$0{,}10\,m_o = m_o\cdot 0{,}5^{\frac{t}{13,2h}} \iff 0{,}10 = 0{,}5^{\frac{t}{13,2h}} \iff \frac{t}{13{,}2h} = \log_{0,5} 0{,}10 \iff t = 13{,}2h\cdot\log_{0,5} 0{,}10$

$t = 43{,}84...h \approx 43{,}8h$

5. a) $N(t) = N_o\cdot 1{,}064^{\frac{t}{17a}}$ mit $N_o = 11{,}3\cdot 10^6$

b) $N(1a) = N_o\cdot 1{,}064^{\frac{1}{17}} = 1{,}003655...\,N_o$;

d.h. die jährliche Steigerungsrate liegt bei ca. 0,37 %

c) $N(30a) = N_o\cdot 1{,}064^{\frac{30a}{17a}} = 11{,}3\cdot 10^6\cdot 1{,}1156... = 12{,}607...\cdot 10^6 \approx 12{,}6\cdot 10^6$

2. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 10d * 03.04.2017 * Gruppe B * Lösung

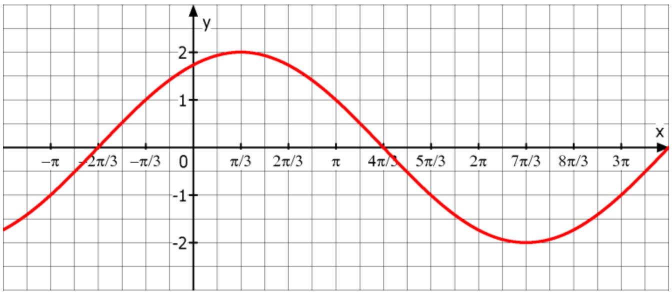
1. Nullstellen: $f(x) = 0 \iff 0 = 2\cdot\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}) \iff \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} = k\cdot\pi$ mit $k \in Z \iff$

$\frac{x}{2} = k\cdot\pi - \frac{\pi}{3} \iff x_k = 2k\cdot\pi - \frac{2\cdot\pi}{3}$;

z.B. $x_o = -\frac{2}{3}\pi$ und $x_1 = 1\frac{1}{3}\pi$

$\bar{x} = (x_o + x_1) : 2 = \frac{1}{3}\pi$ und

$f(\bar{x}) = 2\cdot\sin(\frac{1\cdot\pi}{2\cdot 3}+\frac{\pi}{3}) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$



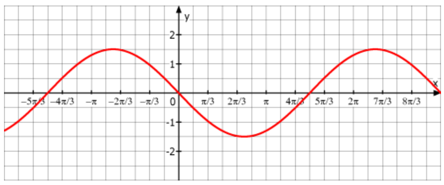
2. a) $a = 1{,}5$ (Amplitude) ; $b = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$; $f(\frac{3}{4}\pi) = -1{,}5$ also wegen $\cos(\pi) = -1$ z.B.

$b\cdot\frac{3}{4}\pi + c = \pi \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi + c = \pi \Rightarrow c = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ insgesamt $f(x) = 1{,}5\cdot\cos(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2})$

b) $d = a = 1{,}5$ und $e = b = \frac{2}{3}$ aber wegen $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ jetzt $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi + f = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$f = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi = \pi$ und daher $f(x) = 1{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}x+\pi)$

oder auch einfacher $f(x) = -1{,}5\cdot\sin(\frac{2}{3}x)$



3. a) $4\cdot 3^x = 2^{x+1} \iff \lg(4) + x\cdot\lg(3) = (x+1)\cdot\lg(2) \iff x\cdot(\lg(3)-\lg(2)) = \lg(2)-\lg(4) \iff$

$x = \frac{\lg(2)-\lg(4)}{\lg(3)-\lg(2)} = \frac{\lg(0{,}5)}{\lg(1{,}5)} = -1{,}7095... \approx -1{,}71$

b) $3 = 2\cdot\log_4(x+1) \iff 1{,}5 = \log_4(x+1) \iff x+1 = 4^{1{,}5} \iff x = 8-1 = 7$

c) $4^x = 3+2\cdot 2^x \iff 2^{2x} = 3+2\cdot 2^x$ Substitution $u = 2^x$ also $u^2 - 2\cdot u - 3 = 0$

$(u-3)\cdot(u+1) = 0 \iff u_1 = 3$ ($u_2 = -1 < 0$ liefert keine Lösung für x!)

$2^x = 3 \iff x = \log_2 3 = 1{,}5849... \approx 1{,}58$

4. a) $m(t) = m_o\cdot 0{,}5^{\frac{t}{13{,}2h}}$

b) $m(3h) = m_o\cdot 0{,}5^{\frac{3{,}0h}{13{,}2h}} = m_o\cdot 0{,}8542...$; nach 3 Stunden sind noch etwa 85% im Körper.

c) Sind 80% zerfallen, so sind noch 20% im Körper. Also $m(t) = 0{,}20\,m_o$

$0{,}20\,m_o = m_o\cdot 0{,}5^{\frac{t}{13{,}2h}} \iff 0{,}20 = 0{,}5^{\frac{t}{13{,}2h}} \iff \frac{t}{13{,}2\,h} = \log_{0{,}5} 0{,}20 \iff t = 13{,}2\,h\cdot\log_{0{,}5} 0{,}20$

$t = 30{,}649...h \approx 30{,}6\,h$

5. a) $N(t) = N_o\cdot 1{,}062^{\frac{t}{17a}}$ mit $N_o = 12{,}6\cdot 10^6$

b) $N(1a) = N_o\cdot 1{,}062^{\frac{1}{17}} = 1{,}003544...\,N_o$;

d.h. die jährliche Steigerungsrate liegt bei ca. 0,35%

c) $N(30a) = N_o\cdot 1{,}062^{\frac{30a}{17a}} = 12{,}6\cdot 10^6\cdot 1{,}11199... = 14{,}011...\cdot 10^6 \approx 14{,}0\cdot 10^6$