Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 12.03.2012 * Gruppe A

1. Im R^3 sind die Punkte $A(2/2/6)$, $B(8/6/2)$, $C(7/-6/-3)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\gamma \sphericalangle BCA$.
   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC. [Ergebnis: $F_{\Delta ABC} = 51$]
   c) Bestimmen Sie einen Punkt S so, dass das Volumen der Pyramide ABCS den Wert $V_{Pyramide} = 102$ besitzt.

2. Im R^3 sind die Punkte $A(3/2/1)$, $B(1/4/5)$ und $P(5/6/9)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und P nicht auf einer Geraden liegen und bestimmen Sie den Abstand $d = d(P; AB)$ des Punktes P von der Geraden $g = AB$. [Ergebnis: $d = \sqrt{30}$]
   b) Die Kugel $k = k(P; r=6)$ und die Gerade $g = AB$ schneiden sich in zwei Punkten. Zeigen Sie, dass einer dieser Punkte B ist, bestimmen Sie den Abstand dieser beiden Punkte voneinander und berechnen Sie dann die Koordinaten des zweiten Punktes.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	5	3	4	5	4	21

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 12.03.2012 * Gruppe B

1. Im R^3 sind die Punkte $A(6/4/2)$, $B(2/8/8)$, $C(-3/-4/7)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\gamma \sphericalangle BCA$.
   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC. [Ergebnis: $F_{\Delta ABC} = 51$]
   c) Bestimmen Sie einen Punkt S so, dass das Volumen der Pyramide ABCS den Wert $V_{Pyramide} = 102$ besitzt.

2. Im R^3 sind die Punkte $A(1/1/3)$, $B(5/3/1)$ und $P(9/5/5)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und P nicht auf einer Geraden liegen und bestimmen Sie den Abstand $d = d(P; AB)$ des Punktes P von der Geraden $g = AB$. [Ergebnis: $d = \sqrt{30}$]
   b) Die Kugel $k = k(P; r=6)$ und die Gerade $g = AB$ schneiden sich in zwei Punkten. Zeigen Sie, dass einer dieser Punkte B ist und bestimmen Sie dann die Koordinaten des zweiten Punktes.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	Summe
Punkte	5	3	4	5	4	21

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 12.03.2012 * Gruppe A * Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+16+16} = 2\sqrt{17}$

$\overline{CB} = \sqrt{1+144+25} = \sqrt{170}$; $\overline{CA} = \sqrt{25+64+81} = \sqrt{170}$ also $\overline{CB} = \overline{CA}$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{CA}}{\overline{CB} \cdot \overline{CA}} = \frac{-5+96+45}{\sqrt{170} \cdot \sqrt{170}} = \frac{136}{170} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 36{,}869...^\circ \approx 36{,}9^\circ$$

b) $\overrightarrow{CB} \text{ x } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\cdot 9 - 5\cdot 8 \\ -5\cdot 5 - 1\cdot 9 \\ 1\cdot 8 + 12\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -34 \\ 68 \end{pmatrix} = 34 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{CA} \text{ x } \overrightarrow{CB} \right| = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot \sqrt{4+1+4} = 17 \cdot 3 = 51$$

c) Höhe h der Pyramide: $102 = V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} F_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 51 \cdot h = 17 \cdot h \Rightarrow h = \frac{102}{17} = 6$

S muss im Abstand h = 6 senkrecht über der vom Dreieck ABC festgelegten Ebene liegen.

$\overrightarrow{CB} \text{ x } \overrightarrow{CA} = 34 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein "Normalenvektor" dieser Ebene und $\left|\vec{n}\right| = 3$.

Wähle z.B. $\vec{S} = \vec{A} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ also $S(6/0/10)$.

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AP} \neq r \cdot \overrightarrow{AB}$, also liegt P nicht auf der Geraden AB.

Die Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF}$, wobei F der Fußpunkt des Lots von P auf AB ist.

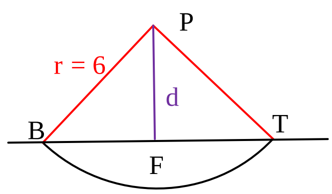
$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB}} = \frac{-4+8+32}{4+4+16} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{36}{24} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$d = \left| \overrightarrow{FP} \right| = \sqrt{(5-0)^2 + (6-5)^2 + (9-7)^2} = \sqrt{30}$$

b) $B \in AB$ und $\left| \overrightarrow{PB} \right| = \sqrt{(5-1)^2 + (6-4)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow B \in k(P; r = 6)$

Ist T der zweite Schnittpunkt, so gilt $\overline{BT} = 2 \cdot \overline{BF}$ und damit $\overrightarrow{BT} = 2 \cdot \overrightarrow{BF} \Rightarrow \vec{T} = \vec{B} + 2 \cdot (\vec{F} - \vec{B}) =$

$2 \cdot \vec{F} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ also $T(-1/6/9)$



Q11 * Mathematik m4

1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 12.03.2012 * Gruppe B * Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16+36} = 2\sqrt{17}$

$\overline{CB} = \sqrt{25+144+1} = \sqrt{170}$; $\overline{CA} = \sqrt{81+64+25} = \sqrt{170}$ also $\overline{CB} = \overline{CA}$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{CA}}{\overline{CB} \cdot \overline{CA}} = \frac{45+96-5}{\sqrt{170}\cdot\sqrt{170}} = \frac{136}{170} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 36{,}869...^\circ \approx 36{,}9^\circ$$

b) $$\overrightarrow{CB} \text{ x } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ x } \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12\cdot 5 - 1\cdot 8 \\ 1\cdot 9 + 5\cdot 5 \\ 5\cdot 8 - 12\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 \\ 34 \\ -68 \end{pmatrix} = -34\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CA} \text{ x } \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\cdot 34\cdot\sqrt{4+1+4} = 17\cdot 3 = 51$$

c) Höhe h der Pyramide: $102 = V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot F_{\Delta ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 51\cdot h = 17\cdot h \Rightarrow h = \frac{102}{17} = 6$

S muss im Abstand $h = 6$ senkrecht über der vom Dreieck ABC festgelegten Ebene liegen.

$\overrightarrow{CB} \text{ x } \overrightarrow{CA} = -34\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein "Normalenvektor" dieser Ebene und $|\vec{n}| = 3$.

Wähle z.B. $\vec{S} = \vec{A} + 2\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $S(10/2/6)$.

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AP} \neq r\cdot\overrightarrow{AB}$, also liegt P nicht auf der Geraden AB.

Die Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF}$, wobei F der Fußpunkt des Lots von P auf AB ist.

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overline{AB}\cdot\overline{AB}} = \frac{32+8-4}{16+4+4}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{36}{24}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F} = \vec{A} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \sqrt{(9-7)^2 + (5-4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{30}$$

b) $B \in AB$ und $\left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{(5-9)^2 + (3-5)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow B \in k(P; r = 6)$

Ist T der zweite Schnittpunkt, so gilt $\overline{BT} = 2\cdot\overline{BF}$ und damit $\overrightarrow{BT} = 2\cdot\overrightarrow{BF} \Rightarrow \vec{T} = \vec{B} + 2\cdot(\vec{F} - \vec{B}) =$

$$2\cdot\vec{F} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ also } T(9/5/-1)$$