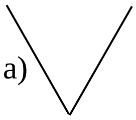
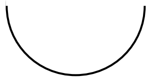
Q11 / Q12   * Mathematik * Extremwertaufgaben

1. Aus einem Blech der Länge a und der Breite b soll eine Dachrinne (der Länge a) hergestellt werden, die maximales Wasservolumen aufnehmen kann.
   a) Die Dachrinne wird V-förmig gebogen.
      Welcher „Knickwinkel“ ist zu wählen?
      Welches maximale Volumen ergibt sich?
   b) Die Dachrinne wird rechtwinklig gebogen.
      Welches maximale Volumen ergibt sich?

   Vergleichen Sie die Ergebnisse mit einer halbkreisförmig gebogenen Dachrinne!

a) 

b) 



2. Auf einem Bauernhof möchte der Bauer eine rechteckige Koppel für seine Pferde anlegen. Die Koppel liegt an einem Fluss und soll deshalb nur an drei Seiten eingezäunt werden. Der zur Verfügung stehende Zaun ist 120 m lang.
   Wie muss der Bauer die Koppel anlegen, damit sie eine möglichst große Weidefläche hat!
   Wie groß ist die Weidefläche dieser Koppel?

3. Aus einer rechteckigen Fensterscheibe mit den Seitenlängen a und b ist vom Mittelpunkt der kleineren Seite aus eine Ecke unter einem Winkel von 45° abgesprungen.
   Aus der restlichen Scheibe soll durch Schnitte parallel zur den ursprünglichen Seiten eine möglichst große rechteckige Scheibe hergestellt werden.

4. Aus einem 36cm langen Draht soll das Kantenmodell einer quadratischen Säule hergestellt werden. Wie lang sind die Kanten zu wählen, damit die Säule maximales Volumen hat?

5. Aus einem 120 cm langen Draht ist das Kantenmodell eines Quaders herzustellen, so dass eine Kante dreimal so lang wie eine andere und der Rauminhalt ein Maximum ist.

6. Aus einem kreisrunden Papierstück mit dem Radius R soll eine kegelförmige Popcorntüte hergestellt werden. Wie muss das Papier zugeschnitten und zusammengeklebt werden, wenn in die fertige Tüte möglichst viel Popcorn gefüllt werden soll?

7. Ein Fenster soll bei gegebenem Umfang U = 5,0m die abgebildete Form (Rechteckseiten a und b sowie oben einen Halbkreisbogen) und maximalen Flächeninhalt haben.
   Wie müssen a und b gewählt werden?
   Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

a

b

8. Vor dem Start der nächsten Etappe der Wüstenrallye steht das Team vor folgendem Problem:
   Der Startort liegt mitten in der Wüste und ist 50 km vom Zielort entfernt.
   Der direkte Weg zum Ziel führt durch den Wüstensand. Dort kann das Fahrzeug des Teams eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h erreichen.
   In 30 km Entfernung vom Startort führt allerdings eine schnurgerade Karawanenstraße zum Zielort. Dort könnte das Fahrzeug eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h fahren.
   Welche Route wird das Team wählen, wenn es jede Route zwischen Startort, Straße und Zielort fahren kann?

Q11 / Q12 * Mathematik * Extremwertaufgaben * Lösungen

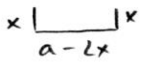
1a, V maximal falls A maximal

$A = \frac{a}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{a^2}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = A(\varphi)$

$A'(\varphi) = \frac{a^2}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\right]$; $A'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\varphi = 45° \Leftrightarrow \varphi = 90°$ und $A(45°) = \frac{a^2}{8}$

b,

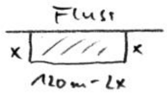


$A(x) = x\cdot(a-2x) = ax - 2x^2$

$A'(x) = a - 4x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$ und $A\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8} = 0{,}125a^2$

$a = r\pi$ und $A = \frac{1}{2}r^2\pi = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\pi^2}\cdot\pi = \frac{a^2}{2\pi} \approx 0{,}16a^2$

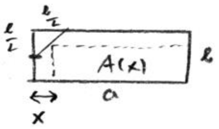
2.



A ist maximal für $x = \frac{1}{4}\cdot 120\,m$ (vgl. 1b,)

$A_{max} = 30m\cdot 60m = 1800\,m^2$

3.

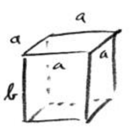


$b \leq a$ $\quad A(x) = (a-x)\left(\frac{b}{2}+x\right) = \frac{1}{2}ab + \left(a-\frac{b}{2}\right)x - x^2$

$A'(x) = a - \frac{b}{2} - 2x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a-b}{4}$

$A_{max} = \left(a - \frac{2a-b}{4}\right)\left(\frac{b}{2} + \frac{2a-b}{4}\right) = \frac{2a+b}{4}\cdot\frac{2a+b}{4} = \frac{(2a+b)^2}{16}$

4.



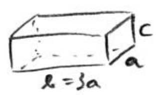
$36cm = 8a + 4b = 4(b+2a)$ d.h. $b = 9cm - 2a$

$V = V(a) = a^2\cdot b = a^2(9cm - 2a) = -2a^3 + 9cm\cdot a^2$

$V'(a) = -6a^2 + 18cm\cdot a = 6a(3cm - a) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow (a_1 = 0)$

$a_2 = 3cm \Rightarrow b = 9cm - 6cm = 3cm = a \rightarrow$ Würfel!

5.



$120cm = 4a + 4c + 4b = 16a + 4c = 4(c + 4a)$

$\Rightarrow c = 30cm - 4a$

$V = V(a) = abc = a\cdot 3a\cdot(30cm - 4a) = 90cm\cdot a^2 - 12a^3$

$V'(a) = 180cm\cdot a - 36a^2 \overset{!}{=} 0 \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} a = 5cm$

und $c = 30cm - 20cm = 10cm$; $b = 15cm$ und $V_{max} = 750cm^3$

6.

$2\pi r = \frac{\varphi}{360°}\cdot 2\pi R = \frac{\varphi}{180°}\cdot\pi R \Rightarrow r = \frac{\varphi}{180°}\cdot R \quad \left(\frac{\varphi}{180°} = k\right)$

$h^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - k^2R^2}$

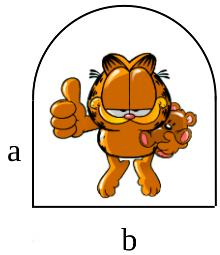
$V = V(k) = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot h = \frac{1}{3}k^2R^2\pi\cdot\sqrt{R^2 - k^2R^2}$

$V(k) = \frac{R^2\pi}{3}\cdot k^2\sqrt{R^2 - k^2R^2} = \frac{R^3\pi}{3}\cdot k^2\sqrt{1-k^2}$

$V'(k) = \frac{R^3\pi}{3}\cdot\left[2k\sqrt{1-k^2} + k^2\cdot\frac{-2k}{2\sqrt{1-k^2}}\right] = \frac{R^3\pi}{3}\cdot\frac{2k(1-k^2) - k^3}{\sqrt{1-k^2}}$

$V'(k) = 0 \Leftrightarrow 2k - 2k^3 - k^3 = 0 \Leftrightarrow k(2 - 3k^2) = 0 \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} k^2 = \frac{2}{3}$; $k = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \varphi = k\cdot 180° \approx 147°$



7. ① $U = 5,0\,m = 2a + b + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{b}{2} = 2a + b(1+\frac{\pi}{2})$

② $F = F(a,b) = a\cdot b + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi = ab + \frac{\pi}{8}b^2$

① in ② $\qquad a = [5m - b(1+\frac{\pi}{2})] : 2$

$F = F(b) = [2,5m - 0,5b(1+\frac{\pi}{2})]\cdot b + \frac{\pi}{8}b^2 = 2,5m\cdot b + b^2[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}]$

$= 2,5m\cdot b + b^2[-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}]$

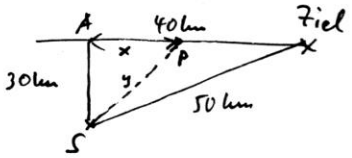
$F'(b) = 0 \Leftrightarrow 0 = F'(b) = 2,5m - 2b\cdot[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}] = 2,5m - b(1+\frac{\pi}{4}) \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow b = \frac{2,5m}{1+\frac{\pi}{4}} = \frac{10m}{4+\pi} \approx 1,400\,m$

$a = 0,700\,m$

$F = (0,700\cdot 1,400 + \frac{\pi}{8}\cdot 1,400^2)\,m^2 \approx 1,75\,m^2$

8.



Alle Längen in km, alle Zeiten in h

$y = \sqrt{x^2+30^2}$

Zeit für Weg über P

Weg S → P : $t_1 = \frac{y}{v_1} = \frac{y}{60} = \frac{\sqrt{x^2+30^2}}{60}$

Weg P – Ziel: $t_2 = (40-x) : 100$

Gesamtzeit $t = t(x) = t_1 + t_2 = \frac{1}{60}\sqrt{x^2+900} + \frac{4-x}{100}$

$t'(x) = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+900)^{-1/2}\cdot 2x + (-\frac{1}{100}) =$

$= \frac{x}{60\sqrt{x^2+900}} - \frac{1}{100} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 100x = 60\sqrt{x^2+900} \Leftrightarrow$

$(10x)^2 = 6^2(x^2+900) \Leftrightarrow 100x^2 = 36x^2 + 6^2\cdot 900 \Leftrightarrow$

$64x^2 = 6^2\cdot 30^2 \;/\sqrt{\ } \qquad 8x = 6\cdot 30$

$x = \frac{180}{8} = 22,5 \qquad y = \sqrt{22,5^2+30^2} = 37,5$

Zeit für Weg über P:

$t = \frac{y}{60} + \frac{40-x}{100} = \frac{37,5}{60} + \frac{17,5}{100} = \frac{4}{5} \triangleq \frac{4}{5}h = 48\,min$

Vergleich: Direkter Weg S → Ziel : $t = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \triangleq 50\,min$

Weg über A : $t = \frac{30}{60} + \frac{40}{100} = \frac{9}{10} \triangleq 54\,min$