Q11 * Mathematik m4
Klausur im Kurshalbjahr 11/2 am 25.04.2012 * Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2+x^2}}$ und $x \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen f streng monoton fällt.

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+4}$ und $x \in D_f = [\,2\,;\,\infty\,[$.

   a) Begründen Sie, dass die Funktion f im angegebenen Definitionsbereich umkehrbar ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Wertebereich W_f.

   b) Bestimmen Sie den Funktionsterm der zugehörigen Umkehrfunktion f^{-1}.

3. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/6/-1)$, $C(5/0/7)$ und $S(2/9/8)$ gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis $[BC]$ ist und berechnen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$.

   b) Das Dreieck ABC lässt sich zu einer Raute fortsetzen. Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Punktes D der Raute sowie des Schnittpunktes M der Diagonalen.
   [Teilergebnis: M(4/3/3)]

   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_R = F_{Raute}$ der Raute aus 3b.
   [Ergebnis: $F_{Raute} = 4 \cdot \sqrt{65}$]

   d) Das Dreieck ABC legt die Ebene E fest.
   Zeigen Sie, dass der Punkt $S(2/9/8)$ relativ zur Ebene E senkrecht über dem Mittelpunkt M der Raute liegt.
   Berechnen Sie nun möglichst einfach das Volumen der Pyramide mit der Raute als Grundfläche und der Spitze bei S.

   e) Gesucht ist ein von S verschiedener Punkt T, so dass die Pyramide mit der Raute als Grundfläche und T als Spitze den gleichen Volumeninhalt wie die Pyramide aus 3d besitzt. Bestimmen Sie mögliche Koordinaten von T.

Aufgabe	1	2a	b	3a	b	c	d	e	Summe
Punkte	6	8	5	4	4	4	6	2	39

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4

Klausur im Kurshalbjahr 11/2 am 25.04.2012 * Gruppe A * Lösung

1. $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2+x^2}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{\sqrt{2+x^2}\cdot 6x - 3x^2\cdot\dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{2+x^2}}}{2+x^2} = \dfrac{(2+x^2)\cdot 6x - 3x^2\cdot x}{(2+x^2)\cdot\sqrt{2+x^2}}$

   $f'(x) = \dfrac{12x + 6x^3 - 3x^3}{(2+x^2)\cdot\sqrt{2+x^2}} = \dfrac{12x + 3x^3}{(2+x^2)\cdot\sqrt{2+x^2}} = \dfrac{3x\cdot(4+x^2)}{(2+x^2)\cdot\sqrt{2+x^2}}$

   $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 3x\cdot(4+x^2) < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0$,

   also ist f nur in $\mathbb{R}_o^- =]-\infty\,;\,0\,]$ streng monoton fallend.

2. a) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+4} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{(x^2+4)\cdot 6 - 6x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{6x^2 + 24 - 12x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{24 - 6x^2}{(x^2+4)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{6\cdot(4-x^2)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{6\cdot(2-x)\cdot(2+x)}{(x^2+4)^2} < 0$ für $x > 2$,

   f ist also in $D_f = [\,2\,;\,\infty\,[$ streng monoton fallend und damit umkehrbar.

   $f(2) = \dfrac{6\cdot 2}{2^2+4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x + 4/x} = \text{"}\dfrac{6}{\infty}\text{"} = 0^+ \;\Rightarrow\; W_f =]\,0\,;\,1{,}5\,]$

   b) $f^{-1}:\quad x = \dfrac{6y}{y^2+4} \;\Rightarrow\; x\cdot y^2 - 6\cdot y + 4x = 0 \;\Rightarrow$

   $y_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot x\cdot 4x}}{2x} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4x^2}}{x}$ und $W_{f^{-1}} = D_f = [2\,;\,\infty\,[\;\Rightarrow$

   $f^{-1}(x) = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 4x^2}}{x}$ mit $D_{f^{-1}} = W_f =]\,0\,;\,1{,}5\,]$

3. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/6/-1)$, $C(5/0/7)$ und $S(2/9/8)$

   a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overline{AB} = \sqrt{4+16+16} = 6 = \sqrt{16+4+16} = \overline{AC}$

   $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \dfrac{8-8-16}{6\cdot 6} = -\dfrac{4}{9} \;\Rightarrow\; \alpha = 116{,}38...^\circ \approx 116{,}4^\circ$

   b) $\vec{D} = \vec{C} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5+2 \\ 0+4 \\ 7-4 \end{pmatrix} \Rightarrow D(7/4/3)$; $\vec{M} = \dfrac{1}{2}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) \;\Rightarrow\; M(\dfrac{8}{2}/\dfrac{6}{2}/\dfrac{6}{2}) = M(4/3/3)$

   c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-8 \\ -16-8 \\ -4-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -24 \\ -20 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

   $F_{Raute} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\cdot\sqrt{4+36+25} = 4\cdot\sqrt{65}$

   d) $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 9-3 \\ 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MS}\circ\overrightarrow{AB} = -2\cdot 2 + 6\cdot 4 + 5\cdot(-4) = 0$ also $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$

   und $\overrightarrow{MS}\circ\overrightarrow{AC} = -2\cdot 4 + 6\cdot(-2) + 5\cdot 4 = 0$ also $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AC}$ und damit gilt $\overrightarrow{MS} \perp$ Ebene E .

   $V_{Pyramide} = \dfrac{1}{3}\cdot F_{Raute}\cdot\overline{MS} = \dfrac{1}{3}\cdot 4\sqrt{65}\cdot\sqrt{4+36+25} = \dfrac{1}{3}\cdot 4\sqrt{65}\cdot\sqrt{65} = \dfrac{260}{3}$

   e) T muss in einer zur Ebene E parallelen Ebene durch den Punkt S liegen,

   z.B. $\vec{T} = \vec{S} + \overrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; T(2+2/9+4/8-4) = T(4/13/4)$