Q11 * Mathematik m3 * Schulaufgabe am 22.04.2015 * Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ und $x \in D_f = \mathbb{R}$.
   Der Graph der Funktion f ist auf dem Arbeitsblatt angegeben.

   a) Bestätigen Sie mit geeigneter Rechnung, dass der Graph der Funktion f den Tiefpunkt $TIP(-1 \,/\, 0{,}5)$ hat.

   b) Begründen Sie, dass die Funktion f_1 mit $f_1(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ und $x \in D_{f_1} = [-1\,;\infty[$ umkehrbar ist.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm $f_1^{-1}(x)$ der zugehörigen Umkehrfunktion und geben Sie auch den Definitionsbereich von f_1^{-1} an.

   c) Zeichnen Sie den Graphen von f_1^{-1} sauber im Diagramm des Arbeitsblattes ein!

2. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(7/3/9)$, $B(-5/4/4)$, $C(-3/1/2)$ und $S(-2/3/0)$ gegeben.
   Die drei Punkte A, B und C legen die Ebene E fest.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit $\gamma = 90^\circ$ ist.
   Berechnen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ dieses Dreiecks.

   b) Das Dreieck ΔABC lässt sich durch einen Punkt P zu einem Rechteck „erweitern".
   Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Dreieck ΔADC den Flächeninhalt $F_{\Delta ADC} = 2 \cdot F_{\Delta ABC}$ besitzt.

   d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$.
   Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E.
   (<u>Ersatz</u>ergebnis: $d = 4$)

   e) Der Punkt S ist der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius $r = 5$.
   Begründen Sie, dass diese Kugel die Ebene E schneidet und berechnen Sie den Radius ρ des Schnittkreises.

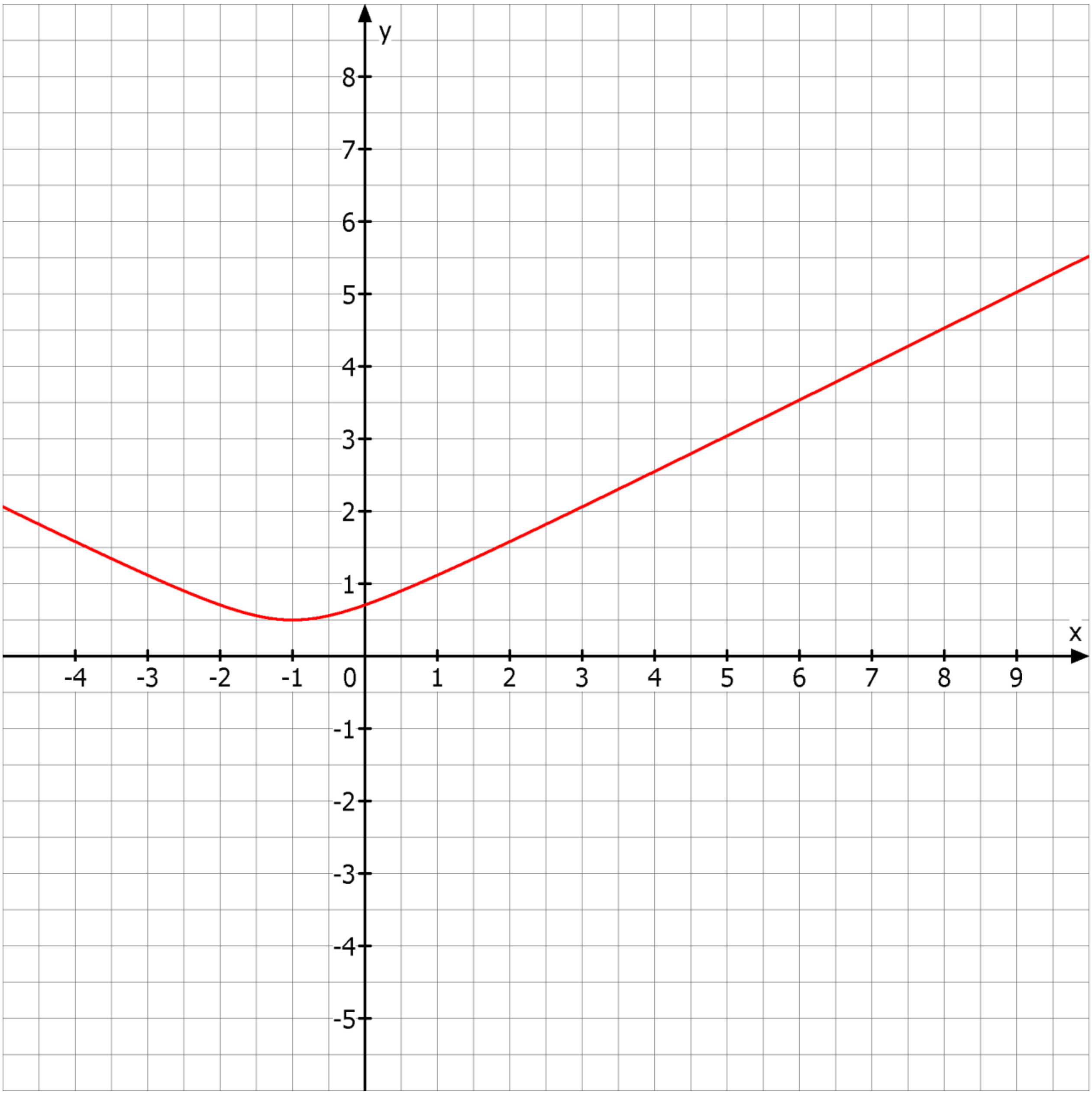
Aufgabe	1a	b	c	2a	b	c	d	e	Summe
Punkte	5	7	2	4	2	2	4	3	29

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m3 * Arbeitsblatt zur Schulaufgabe am 22.04.2015 * Gruppe A

Name: ………………………………………

Zu 1c) Graph der Funktion f zur Aufgabe 1.



Q11 * Mathematik m3 * Schulaufgabe am 22.04.2015 * Gruppe B

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ und $x \in D_f = \mathbb{R}$.
   Der Graph der Funktion f ist auf dem Arbeitsblatt angegeben.

   a) Bestätigen Sie mit geeigneter Rechnung, dass der Graph der Funktion f den Tiefpunkt $TIP(-1 / 1)$ hat.

   b) Begründen Sie, dass die Funktion f_1 mit $f_1(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ und $x \in D_{f_1} = [-1 ; \infty[$ umkehrbar ist.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm $f_1^{-1}(x)$ der zugehörigen Umkehrfunktion und geben Sie auch den Definitionsbereich von f_1^{-1} an.

   c) Zeichnen Sie den Graphen von f_1^{-1} sauber im Diagramm des Arbeitsblattes ein!

2. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(3/9/7)$, $B(4/4/-5)$, $C(1/2/-3)$ und $S(3/0/-2)$ gegeben.
   Die drei Punkte A, B und C legen die Ebene E fest.

   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit $\gamma = 90^\circ$ ist.
   Berechnen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ dieses Dreiecks.

   b) Das Dreieck ΔABC lässt sich durch einen Punkt P zu einem Rechteck „erweitern“.
   Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, dass das Dreieck ΔADC den Flächeninhalt $F_{\Delta ADC} = 2 \cdot F_{\Delta ABC}$ besitzt.

   d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCS$.
   Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E.
   (<u>Ersatz</u>ergebnis: $d = 4$)

   e) Der Punkt S ist der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius $r = 5$.
   Begründen Sie, dass diese Kugel die Ebene E schneidet und berechnen Sie den Radius ρ des Schnittkreises.

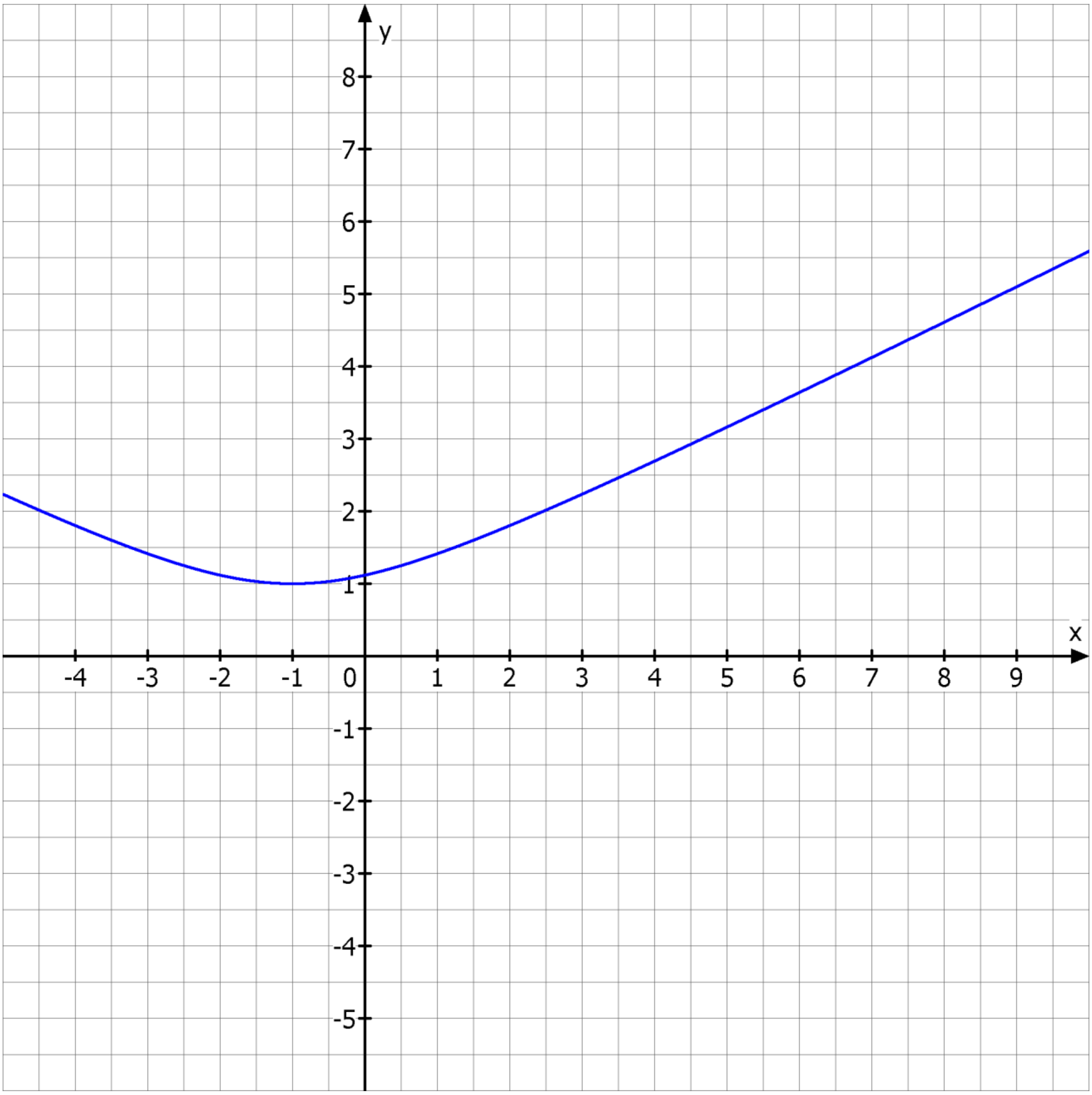
Aufgabe	1a	b	c	2a	b	c	d	e	Summe
Punkte	5	7	2	4	2	2	4	3	29

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m3 * Arbeitsblatt zur Schulaufgabe am 22.04.2015 * Gruppe B

Name: ……………………………………….

Zu 1c) Graph der Funktion f zur Aufgabe 1.



Q11 * Mathematik m3 * Schulaufgabe am 22.04.2015 * Lösung Gruppe A

1\. a) $f'(x) = 0{,}5 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (2x+2) = \dfrac{x+1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ und $f'(x) = 0$ für $x = -1$

$f'(x) < 0$ für $x < -1$ und $f'(x) > 0$ für $x > -1$, d.h. an der Stelle $x_1 = -1$ befindet sich ein Tiefpunkt. $f(-1) = 0{,}5 \cdot \sqrt{1-2+2} = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$, also $TIP(-1/0{,}5)$

b) Da $f'(x) > 0$ für $x > -1$ gilt, ist f in $[-1; \infty[$ streng monoton steigend und daher in diesem Intervall auch umkehrbar.

$f_1(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ mit $x \in D_{f_1} = [-1 ; \infty[$

$f_1^{-1}:\ x = 0{,}5 \cdot \sqrt{y^2 + 2y + 2} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y^2 + 2y + 2} \Leftrightarrow 4x^2 = y^2 + 2y + 2 \Leftrightarrow$

$0 = y^2 + 2y + (2 - 4x^2) \Leftrightarrow$

$y_{1/2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - 4x^2)}\right)$

$y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - (2 - 4x^2)} =$

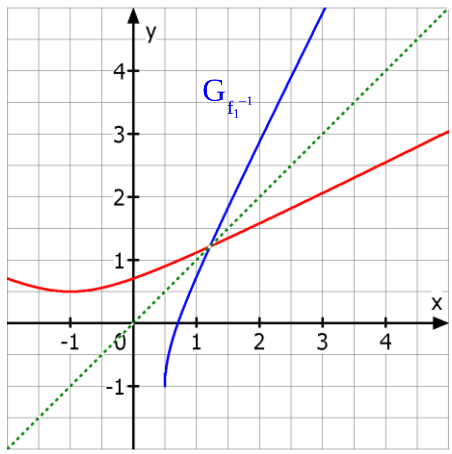
$-1 \pm \sqrt{4x^2 - 1} = -1 \pm 2 \cdot \sqrt{x^2 - 0{,}25}$

Wegen $W_{f_1^{-1}} = D_{f_1} = [-1 ; \infty[$ gilt

$f_1^{-1}(x) = -1 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 0{,}25}$ mit $x \geq \dfrac{1}{2}$,

d.h. $D_{f_1^{-1}} = [0{,}5 ; \infty[= W_{f_1}$

c)

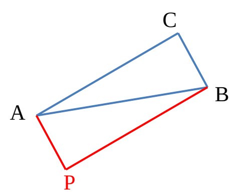


2\. a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 10 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 0$

also gilt $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ und damit $\gamma = 90^\circ$.

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{100+4+49} = \sqrt{153}$, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$ und $F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{153} \cdot \sqrt{17} = 25{,}5$

b) $\vec{P} - \vec{A} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ also $P(5/6/11)$



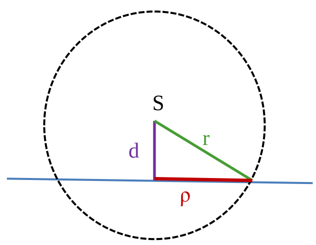
c) Z.B. $\vec{D}$ mit $\overrightarrow{CD} = 2 \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ d.h. $\vec{D} = \vec{C} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $D(-7/7/6)$

d) $V = \dfrac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{CS} \circ \left(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right)\right| = \dfrac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -17 \\ -34 \\ 34 \end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{6} \cdot \left|(-17 - 68 - 68)\right| = 25{,}5$

andererseits $25{,}5 = V = \dfrac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC} \cdot d = \dfrac{1}{3} \cdot 25{,}5 \cdot d \Rightarrow d = 3$

e) $d^2 + \rho^2 = r^2 \Rightarrow$

$\rho = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$



Q11 * Mathematik m3 * Schulaufgabe am 22.04.2015 * Lösung Gruppe B

1. a) $f'(x) = 0{,}5 \cdot \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+2x+5}} \cdot (2x+2) = \dfrac{x+1}{2\cdot\sqrt{x^2+2x+5}}$ und $f'(x) = 0$ für $x = -1$

   $f'(x) < 0$ für $x < -1$ und $f'(x) > 0$ für $x > -1$, d.h. an der Stelle $x_1 = -1$ befindet sich ein Tiefpunkt. $f(-1) = 0{,}5\cdot\sqrt{1-2+5} = 0{,}5\cdot 2 = 1$, also TIP$(-1/1)$

   b) Da $f'(x) > 0$ für $x > -1$ gilt, ist f in $[-1;\infty[$ streng monoton steigend und daher in diesem Intervall auch umkehrbar.

   $f_1(x) = 0{,}5\cdot\sqrt{x^2+2x+5}$ mit $x \in D_{f_1} = [-1\,;\infty\,[$

   $f_1^{-1}:\; x = 0{,}5\cdot\sqrt{y^2+2y+5} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y^2+2y+5} \Leftrightarrow 4x^2 = y^2+2y+5 \Leftrightarrow$

   $0 = y^2 + 2y + (5-4x^2) \Leftrightarrow$

   $y_{1/2} = \dfrac{1}{2}\cdot(-2 \pm \sqrt{4-4\cdot1\cdot(5-4x^2)})$

   $y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-(5-4x^2)} =$

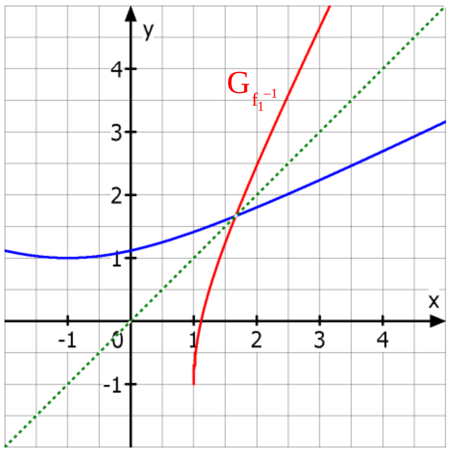
   $-1 \pm \sqrt{4x^2-4} = -1 \pm 2\cdot\sqrt{x^2-1}$

   Wegen $W_{f_1^{-1}} = D_{f_1} = [-1\,;\infty\,[$ gilt

   $f_1^{-1}(x) = -1 + 2\cdot\sqrt{x^2-1}$ mit $x \geq 1$,

   d.h. $D_{f_1^{-1}} = [1;\infty[\; = W_{f_1}$

   c)

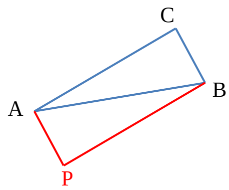


2. a) $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}2\\7\\10\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-5\\-12\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB} = 2\cdot3+7\cdot2+10\cdot(-2) = 0$

   also gilt $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ und damit $\gamma = 90^\circ$.

   $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4+49+100} = \sqrt{153}$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$ und $F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{153}\cdot\sqrt{17} = 25{,}5$

   b) $\vec{P} - \vec{A} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix}3\\9\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\11\\5\end{pmatrix}$ also P$(6/11/5)$



   c) Z.B. $\vec{D}$ mit $\overrightarrow{CD} = 2\cdot\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix}$ d.h. $\vec{D} = \vec{C} + \begin{pmatrix}6\\4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\\-7\end{pmatrix}$, also D$(7/6/-7)$

   d) $V = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{CS}\circ\left(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right)\right| = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-34\\34\\-17\end{pmatrix}\right| = \dfrac{1}{6}\cdot|(-68-68-17)| = 25{,}5$

   andererseits $25{,}5 = V = \dfrac{1}{3}\cdot F_{\Delta ABC}\cdot d = \dfrac{1}{3}\cdot 25{,}5\cdot d \;\Rightarrow\; d = 3$

   e) $d^2 + \rho^2 = r^2 \Rightarrow$

   $\rho = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{25-9} = 4$