Q11 * Mathematik * Aufgaben zur natürlichen Logarithmusfunktion

1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich D_f , den Term $f'(x)$ der Ableitungsfunktion und alle Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen von f.

   a) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$ b) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)$

   c) $f(x) = \ln\frac{3x}{x^2+4}$ d) $f(x) = \ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Wie allgemein bekannt gelten für Logarithmen die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

   $\log_b x + \log_b y = \log_b(x\cdot y)$; $\log_b x - \log_b y = \log_b(\frac{x}{y})$; $\log_b(x^n) = n\cdot\log_b x$

   Peter behauptet daher, dass die Funktionen f und g völlig identisch sind.
   Nehmen Sie zu Peters Behauptung Stellung.

   a) $f(x) = \ln(x^2)$ und $g(x) = 2\cdot\ln(x)$

   b) $f(x) = \ln(x) + \ln(x+1)$ und $g(x) = \ln(x\cdot(x+1))$

Und nun noch eine anspruchsvolle Aufgabe für Mathe-Experten:

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10\cdot\ln\left(\frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}\right)$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

   b) Zeigen Sie, dass f eine streng monoton wachsende Funktion und damit umkehrbar ist.

   c) Bestimmen Sie den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion von f .

Q11 * Mathematik * Aufgaben zur natürlichen Logarithmusfunktion

Lösungen

1. a) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ und TIP(0 / 0)

   b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}\right) = \ln\dfrac{4+x^2}{2x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x\cdot(4+x^2)}$; TIP $(2 / \ln 2)$

   c) $f(x) = \ln\dfrac{3x}{x^2+4}$; $D_f = \mathbb{R}^+$; $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{x\cdot(4+x^2)}$; HOP$(2 / \ln\frac{3}{4})$

   d) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; $D_f =]-1\,;\infty[$; $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)\cdot(x^2+1)}$; HOP$(1/\ln\sqrt{2})$

2. a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $D_g = \mathbb{R}^+$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_g$

   (G_f ist symmetrisch zur y-Achse.)

   b) $D_f = \mathbb{R}^+$ und $D_g =]-\infty\,;-1[\, \cup\,]0\,;\infty[$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_f$

3. a) $D_f = \mathbb{R}^+$ und NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

   b) $f'(x) = \dfrac{40}{x\cdot(3x^2+4)} > 0$ für alle $x \in D_f = \mathbb{R}^+$

   c) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4e^{0,2x}}{4-3e^{0,2x}}}$