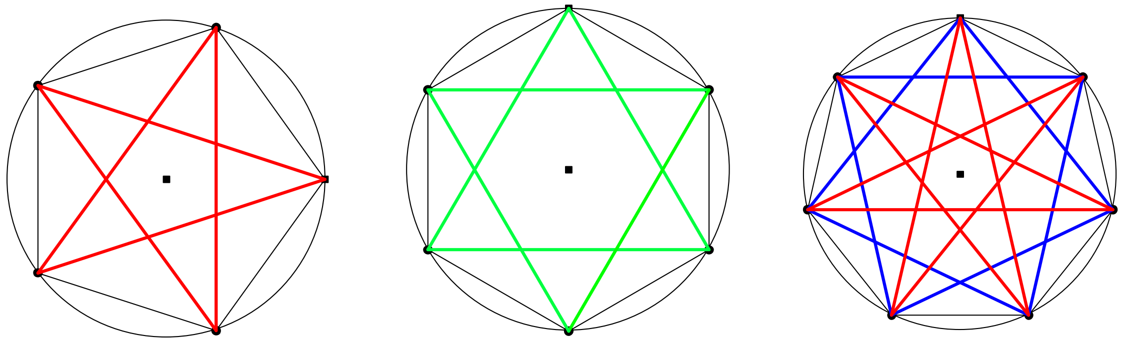
**Fördergruppe Mathematik * Jahrgangsstufe 7 * Sterne**

Auf einem Kreis werden n Punkte so angebracht, dass benachbarte Punkte jeweils den gleichen Abstand voneinander haben. Es soll stets $n > 4$ gelten!



n = 5 n = 6 n = 7

Verbindet man die benachbarten Punkte miteinander, so erhält man ein so genanntes reguläres n-Eck.

Wie groß sind die Innenwinkel in diesem regulären n-Eck?

Es lassen sich aber auch (rote, grüne und blaue) „Sterne“ mit Hilfe dieser Punkte bilden. Erkläre, wie die roten, blauen und grünen Sterne in den Bildern oben entstehen!

Die roten und blauen Sterne lassen sich mit einem durchgehenden Streckenzug zeichnen, ohne dass man den Stift absetzen muss.
Das ist beim grünen Stern im 6-Eck nicht der Fall.

Wir bezeichnen einen Stern, der als durchgehender Streckenzug gezeichnet werden kann als **„echten Stern“**.

**Untersuche folgende Fragen zu echten Sternen** (Gib jeweils Werte für n an!):

a) Gibt es n-Ecke, die keinen einzigen echten Stern besitzen?
b) Gibt es n-Ecke, die verschiedene echte Sterne besitzen?
c) Gibt es n-Ecke, die genau einen echten Stern besitzen?
d) Wie viele verschiedene echte Sterne hat ein 20-Eck?
e) Wie viele verschiedene echte Stern hat ein 23-Eck?

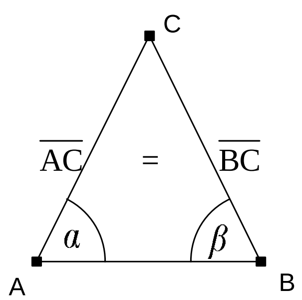
Der Winkel an den Sternspitzen wird Sternwinkel genannt.
**Untersuche folgende Fragen zu den Sternwinkeln**:

f) Wie groß ist der Sternwinkel beim abgebildeten roten Stern des 5-Ecks?
g) Wie groß ist der Sternwinkel beim abgebildeten roten bzw. blauen Stern des 7-Ecks?
h) Welche Sternwinkel sind beim 20-Eck möglich?
i) Kannst du allgemeine Aussagen über die möglichen Sternwinkel im n-Eck machen?

**Hinweis:**

Für die Lösung der Aufgaben ist der Satz über Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck hilfreich:

**Ist ein Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, dann sind die Basiswinkel $\alpha$ und $\beta$ gleich groß.**




$\alpha = \beta$

**Lösungen zum Aufgabenblatt „Sterne“**

a) Das 6-Eck besitzt keinen echten Stern.
b) Das 7-Eck und das 9-Eck haben z.B. 2 echte Sterne.
c) Das 5-Eck, das 8-Eck oder auch das 10-Eck haben genau einen echten Stern.
d) Das 20-Eck hat 3 verschiedene echte Sterne.
e) Das 23-Eck hat 10 verschiedene echte Sterne.

Ein n-Eck (mit $n > 4$) hat für jedes $m>1$, $m < n/2$ mit ggT(n;m) = 1 einen echten Stern. Man erhält diesen echten Stern, wenn man von einer beliebigen Ecke ausgehend die Verbindungslinie zu der Ecke zieht, die im Uhrzeigersinn m Ecken entfernt liegt.
ggT(n;m) = 1 bedeutet, dass man erst mit der n-ten Strecke zur Ausgangsecke zurückkehrt.
Für $m^* = n - m$ und für m erhält man dabei den gleichen echten Stern.
Z.B. gilt ggT(8;3) = 1 und ggT(8;5) = 1. Die zugehörigen echten Sterne sehen aber gleich aus.

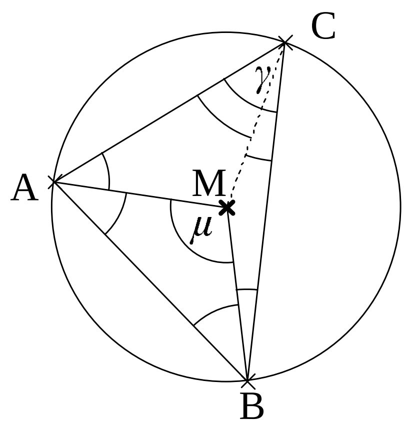
| Anzahl n der Ecken | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 20 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl echter Sterne | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 10 |

Für n = 20 gilt z.B.:
ggT(20;3) = 1 und ggT(20;7) = 1 und ggT(20;9) = 1
Es gibt daher genau drei echte Sterne für das 20-Eck.

Bei der Beantwortung der Frage zu den Sternwinkeln hilft folgender Satz:
Der Umgfangswinkel $\gamma$ ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel $\mu$.

Hierbei sind A, B und C beliebige Punkte auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M.

Zeige $2 \cdot \gamma = \mu$ indem du in den gleichschenkligen Dreiecken ABM, AMC und CMB gleich große Basiswinkel einträgst und die Winkelsumme im Dreieck beachtest.




f) Der Sternwinkel im roten 5-Eck hat die Größe $(360^o : 5) : 2 = 36^o$.

g) Der Sternwinkel im roten 7-Eck hat die Größe $(360^o : 7) : 2 = 25\frac{5}{7}\ ^o$.

Der Sternwinkel im blauen 7-Eck hat die Größe $(3 \cdot (360^o : 7)) : 2 = 77\frac{1}{7}\ ^o$.

h) Im 20-Eck betragen die Sternwinkel $126^o$, $54^o$ und $18^o$ ( zu ggT(20;3) = 1 , zu zu ggT(20;7) = 1 und zu zu ggT(20,9) = 1 ).

i) Gibt es für die natürliche Zahl n (n>4) ein m mit ggT(n;m) = 1 (m < n/2), so gibt es im n-Eck einen echten Stern mit dem Sternwinkel $180^o - \frac{360^o \cdot m \cdot 2}{n \cdot 2} = 180^o - \frac{360^o \cdot m}{n}$.