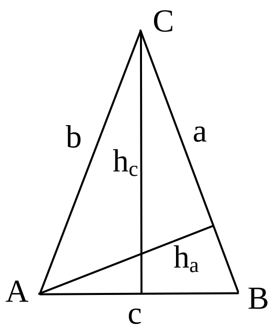
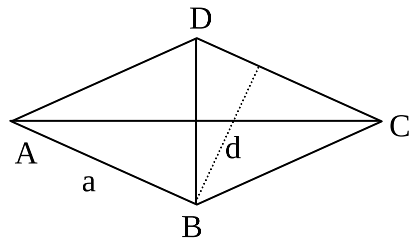
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zum Satz des Pythagoras

1. Bestimme den Abstand der beiden Punkte A(-2/3) und B(4/-1).

2. Das gleichschenklige Dreieck ABC hat die Seiten $a = b = 8$ und $c = 4$.
   a) Berechne die Höhe h_c und den Flächeninhalt des Dreiecks.
   b) Berechne die Höhen h_a und h_b.

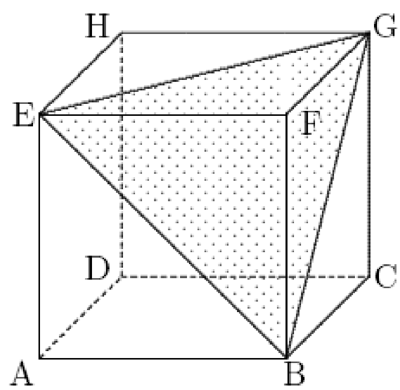


3. In der Raute ABCD mit Seitenlänge $a = 6$ ist die Diagonale [AC] doppelt so lang wie die Diagonale [BD].
   a) Berechne die Länge der beiden Diagonalen.
   b) Berechne den Flächeninhalt der Raute.
   c) Welchen Abstand d haben die beiden Seiten [AB] und [CD] voneinander?

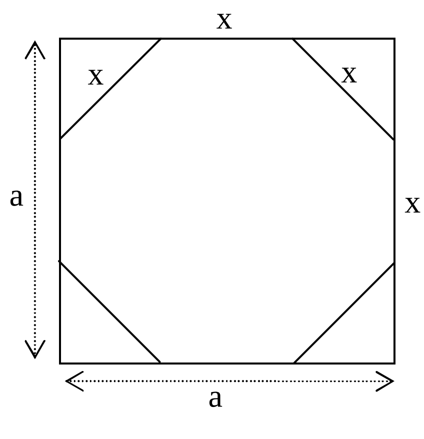


4. Von einem Holzwürfel mit der Kantenlänge 10, 0 cm wird ein Stück abgesägt (vgl. Abbildung).

   Berechne den Flächeninhalt der (schraffierten) Schnittfläche!



5. In einem Quadrat der Seitenlänge a sollen vier gleichschenklige Dreiecke so abgeschnitten werden, dass ein reguläres Achteck entsteht. Berechne die Seitenlänge x des Achtecks als Bruchteil der Länge a. Wie viel Prozent der Quadratfläche macht die Fläche des Achtecks aus?



Mathematik * Klasse 9 * Aufgaben zum Satz des Pythagoras * Lösungen

1. $\overline{AB} = \sqrt{(-2-4)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\cdot\sqrt{13}$

2. a) $a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^{\,2} \iff h_c^{\,2} = 8^2 - 2^2 \iff h_c^{\,2} = 60 \iff h_c = 2\cdot\sqrt{15}$

$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

b) $4\sqrt{15} = A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a \iff h_a = \frac{2\cdot 4\sqrt{15}}{8} = \sqrt{15}$ und $h_b = h_a = \sqrt{15}$

3. a) Mit $\overline{BD} = x$ und $\overline{AC} = 2x$ gilt:

$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{2}\right)^2 \iff 6^2 = \frac{x^2}{4} + x^2 \iff 36 = \frac{5x^2}{4} \iff x^2 = \frac{144}{5} \iff$

$\overline{BD} = x = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2{,}4\sqrt{5}$ und $\overline{AC} = 2\cdot\overline{BD} = 4{,}8\sqrt{5}$

b) $A_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD} = \frac{1}{2}\cdot 2{,}4\cdot\sqrt{5}\cdot 4{,}8\cdot\sqrt{5} = 5{,}76\cdot 5 = 28{,}8$

c) $28{,}8 = A_{ABCD} = \overline{AB}\cdot d = 6\cdot d \Rightarrow d = \frac{28{,}8}{6} = 4{,}8$

4. $\overline{AG} = \overline{GB} = \overline{EB} = \overline{AB}\cdot\sqrt{2} = 10\text{cm}\cdot\sqrt{2}$ Das Dreieck EBG ist also gleichseitig.

Die Höhe h in diesem gleichseitigen Dreieck hat die Länge

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{EB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\text{cm}\cdot\sqrt{2} = 5\cdot\sqrt{6}\ \text{cm}$

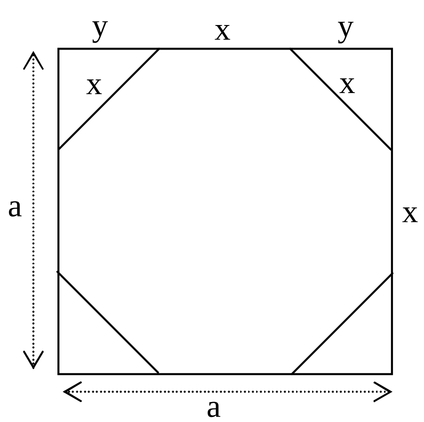
Für den Flächeninhalt des Dreiecks EBG gilt also:

$A_{EBG} = \frac{1}{2}\cdot\overline{EB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 10\text{cm}\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cdot\sqrt{6}\cdot\text{cm} = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 86{,}6\,\text{cm}^2$

5. Es gilt $a = y + x + y$ und $x = y\cdot\sqrt{2}$

also $a = 2y + y\cdot\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})\cdot y$ und damit

$y = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$ sowie $x = \sqrt{2}\cdot y = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$



also $x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot a = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}\cdot a$

$x = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}\cdot a = (\sqrt{2}-1)\cdot a$ und

$y = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot a}{\sqrt{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot a$; es folgt $A_{Achteck} = a^2 - 2\cdot y^2 = a^2 - 2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot a^2$

$A_{Achteck} = a^2 - 2\cdot(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2})\cdot a^2 = (2\sqrt{2}-2)\,a^2$ und damit gilt

$\frac{A_{Achteck}}{A_{Quadrat}} = \frac{(2\sqrt{2}-2)\,a^2}{a^2} = 2\sqrt{2}-2 \approx 0{,}828 = 82{,}8\%$.