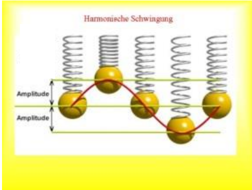
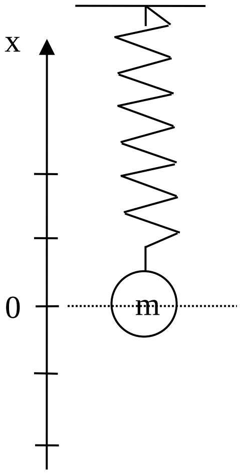
Physik * Jahrgangsstufe 10 * Harmonische Schwingung



Mathematische Beschreibung des Federpendels

An einer Feder mit der Federhärte D hängt die Masse m.
Lenkt man diese Masse m um x_0 aus der so genannten Ruhelage ($x = 0$) aus und lässt sie dann los, so beginnt sie mit der Schwingungsdauer T zu schwingen.



Lenkt man die Masse nach unten aus, so wirkt eine resultierende Kraft F nach oben, lenkt man die Masse nach oben aus, so wirkt eine resultierende Kraft F nach unten. [Minuszeichen in (*)]
Man spricht von einer **„rücktreibenden“** Kraft.
Diese Kraft F ist zur Auslenkung direkt proportional, d.h. zur zwei-, drei-, vierfachen Auslenkung gehört auch die zwei-, drei-, vierfache rücktreibende Kraft.

Also gilt: $$F_{resultierend} = F = -D \cdot x \quad (*)$$

Nach Newton gilt: $F_{resultierend} = a \cdot m$ also folgt $a \cdot m = -D \cdot x$

Wegen $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ und $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ gilt also $a = \dfrac{\Delta\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t}$, und man kann damit mathematisch zeigen, dass das Federpendel sinusförmig (d.h. harmonisch) mit der Schwingungsdauer T schwingt, wobei gilt: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m}{D}}$

Bei einer Auslenkung um $x_o = x_{max}$ z.B. nach oben gilt also

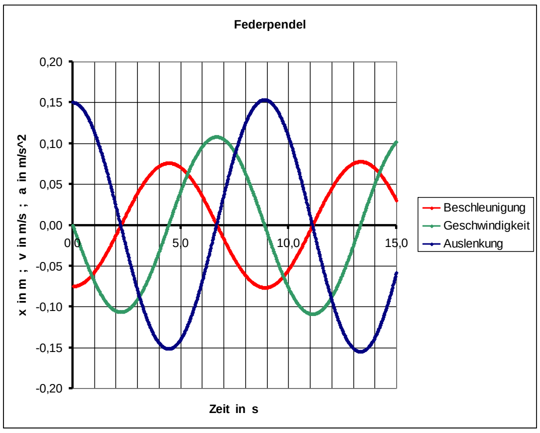
$$x(t) = x_o \cdot \cos(\omega \cdot t) \ \text{ mit } \ \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}, \text{ d.h. } \ x(t) = x_o \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right).$$

Zudem kann man mathematisch für die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ der Masse m folgern:

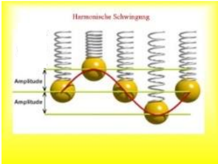
$$v(t) = -v_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \ \text{ mit } \ v_{max} = x_{max} \cdot \omega = x_o \cdot \omega = x_o \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \ \text{ und}$$

$$a(t) = -a_{max} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \ \text{ mit } \ a_{max} = v_{max} \cdot \omega = x_o \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = x_o \cdot \frac{D}{m}$$

Eine Simulation mit Hilfe der Methode der kleinen Schritte bestätigt diese mathematisch herleitbaren Formeln für $v(t)$ und $a(t)$.



Physik * Jahrgangsstufe 10 * Harmonische Schwingung * Aufgaben



1. An einer Feder mit der Federhärte 20 N/m hängt eine Kugel der Masse 100g. Die Kugel wird um 10cm nach „unten“ ausgelenkt und dann losgelassen. Reibungseffekte sollen zunächst vernachlässigt werden.
   a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer der auftretenden harmonischen Schwingung und geben Sie für die Kugel die Ortsfunktion x(t) an.
   b) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit und die maximale Beschleunigung der Kugel und geben Sie dann die Geschwindigkeit v(t) und die Beschleunigung a(t) der Kugel in Abhängigkeit von der Zeit an.

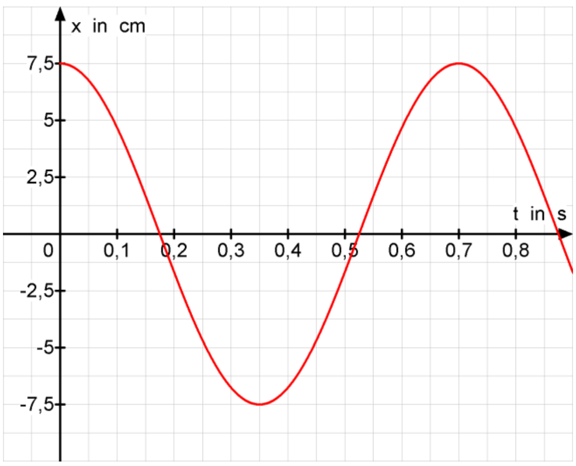
   Pro Schwingungsdauer gehen etwa 5,0% der mechanischen Energie auf Grund von Reibungseffekten verloren.
   c) Bestimmen Sie die Abnahme der Amplitude pro Schwingungsdauer! Wie groß ist die Amplitude nach 10 Sekunden?

2. Eine Kugel unbekannter Masse wird an eine Feder unbekannter Federhärte angehängt. Die Feder dehnt sich dabei um 20cm.
   a) Zeigen Sie, dass die Kugel mit einer Schwingungsdauer von 0,90s schwingen kann.

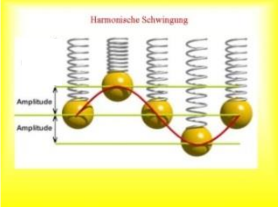
   Nun lenkt man die Kugel aus ihrer Ruhelage um weitere 20cm nach unten aus.
   b) Mit welcher Maximalgeschwindigkeit bewegt sich die Kugel dann durch die Ruhelage?

3. Eine Kugel der Masse 200g wird an einer Feder befestigt und dabei mit der Hand gehalten, so dass die Feder unbelastet bleibt. Lässt man dann die Kugel los, so schwingt sie mit einer Amplitude von 8,0cm.
   Bestimmen Sie die Federhärte, die Schwingungsdauer und die Maximalgeschwindigkeit der Kugel beim Durchgang durch die Ruhelage.

4. Das t – x – Diagramm zeigt die Schwingung eines Federpendels. Die Federhärte beträgt dabei 8,0 N/m.
   a) Geben Sie die Ortsfunktion x(t) an.
   b) Bestimmen Sie die am Federpendel hängende Masse m .
   c) Welche maximale Geschwindigkeit erreicht diese Masse beim Schwingen?



Physik * Jahrgangsstufe 10 * Harmonische Schwingung * Aufgaben Lösungen



1. a) $T = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{D}} = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}10\text{kg}}{20\,\text{N/m}}} = 0{,}444\,\text{s}$

$x(t) = -\,0{,}10\,\text{m}\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right) \approx -0{,}10\,\text{m}\cdot\cos\left(\dfrac{14{,}14}{\text{s}}\cdot t\right)$

b) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}}\cdot x_{max} = \sqrt{\dfrac{20\,\text{N/m}}{0{,}10\,\text{kg}}}\cdot 0{,}10\text{m} = 1{,}4\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$a_{max} = \dfrac{D}{m}\cdot x_{max} = \dfrac{20\,\text{N/m}}{0{,}10\,\text{kg}}\cdot 0{,}10\text{m} = 20\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v(t) = v_{max}\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right) \approx 1{,}4\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\sin\left(\dfrac{14{,}14}{\text{s}}\cdot t\right)$

$a(t) = a_{max}\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t\right) \approx 20\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\cos\left(\dfrac{14{,}14}{\text{s}}\cdot t\right)$

c) $\dfrac{1}{2}D(x_{max,2})^2 = 0{,}95\cdot\dfrac{1}{2}D(x_{max,1})^2 \;\Rightarrow\; x_{max,2} = \sqrt{0{,}95}\cdot x_{max,1} \approx 0{,}975\cdot x_{max,1}$

Pro Schwingungsdauer nimmt die Amplitude etwa um 2,5% ab.

$10\text{s} = \dfrac{10\,\text{s}}{T}\cdot T \approx 23T$; $x_{max}(10\text{s}) \approx (0{,}975)^{23}\cdot x_{max,1} = 5{,}6\,\text{cm}$

2. a) $m\cdot g = D\cdot\Delta x \;\Rightarrow\; \dfrac{m}{D} = \dfrac{\Delta x}{g} = \dfrac{0{,}20\,\text{m}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ und damit $T = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{D}} = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}20\,\text{m}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}90\,\text{s}$

b) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}}\cdot x_{max} = \sqrt{\dfrac{9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}20\,\text{m}}}\cdot 0{,}20\text{m} = 1{,}4\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

3. Eine Schwingungsamplitude von $x_{max} = 8{,}0\text{cm}$ bedeutet, dass beim Anhängen der Masse an die Feder diese um genau 8,0cm gedehnt wird.

Wegen $m\cdot g = D\cdot\Delta x \;\Rightarrow\; D = \dfrac{m\cdot g}{\Delta x} = \dfrac{0{,}200\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{N/kg}}{0{,}080\,\text{m}} = 24{,}52...\dfrac{\text{N}}{\text{m}} \approx 25\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$

$T = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{D}} = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{0{,}20\text{kg}}{24{,}5\,\text{N/m}}} = 0{,}57\,\text{s}$ und

$v_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}}\cdot x_{max} = \sqrt{\dfrac{24{,}5\,\text{N/m}}{0{,}200\,\text{kg}}}\cdot 0{,}080\,\text{m} = 0{,}89\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

4. a) $x(t) = 7{,}5\text{cm}\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi}{0{,}70\text{s}}\cdot t\right)$

b) $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{m}{k}} \;\Rightarrow\; m = \dfrac{T^2}{4\pi^2}\cdot D = \dfrac{(0{,}7\text{s})^2\cdot 8{,}0\,\text{N/m}}{4\pi^2} = 0{,}10\,\text{kg}$

c) $v_{max} = \sqrt{\dfrac{D}{m}}\cdot x_{max} = \sqrt{\dfrac{8{,}0\,\text{N/m}}{0{,}10\,\text{kg}}}\cdot 0{,}075\,\text{m} = 0{,}67\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$