Q11 * Mathematik * Aufgaben zum natürlichen Logarithmus

1. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen den Definitionsbereich D_f und ermitteln Sie alle Nullstellen.
   Berechnen Sie dann die Ableitung $f\,'(x)$ und geben ermitteln Sie alle Hoch- bzw. Tiefpunkte des Graphen von f.

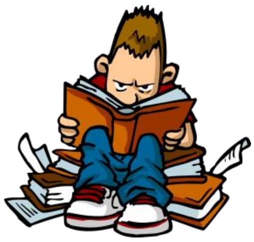
   a) $f(x) = \ln(2x+3)$

   b) $f(x) = \ln(x^2-2x)$

   c) $f(x) = \ln(2+2x-x^2)$

   d) $f(x) = \ln(\frac{2x-3}{x^2+1})$

   e) $f(x) = \ln(\frac{2x}{x+1})$

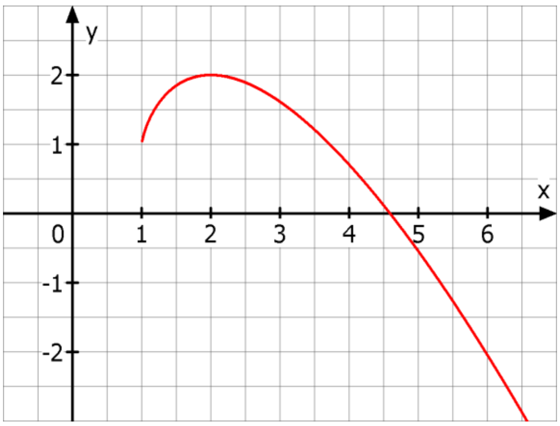


2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit
   $f(x) = x - (x-1)\cdot\ln(x-1)$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Ableitung $f\,'(x)$.

   b) Zeigen Sie, dass G_f nur einen Extrempunkt, nämlich den Hochpunkt(2/2) besitzt.

   c) Begründen Sie, dass f nur eine Nullstelle x_1 besitzt, und dass $4 < x_1 < 5$ gilt.

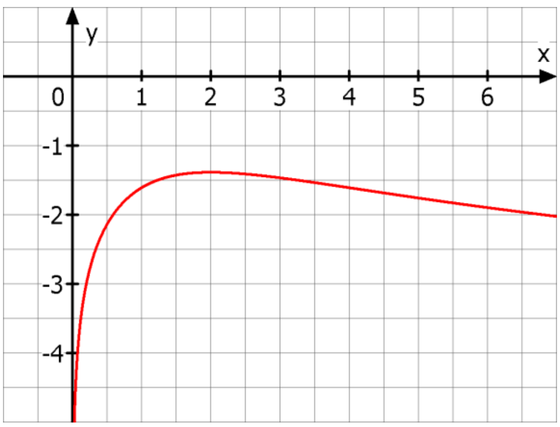


3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit
   $f(x) = \ln(\frac{x}{x^2+4})$.

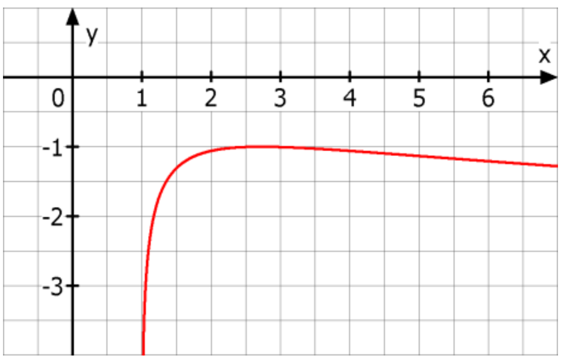
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Ableitung $f\,'(x)$.

   b) Zeigen Sie, dass G_f nur einen Extrempunkt, nämlich den Hochpunkt (2/f(2)) besitzt.

   c) Begründen Sie, dass f keine Nullstelle besitzt.



4. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit
   $f(x) = \ln(\frac{\ln x}{x})$.
   Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und zeigen Sie, dass der Graph von f genau einen Hochpunkt besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes.



Q11 * Mathematik * Aufgaben zum natürlichen Logarithmus * Lösungen

1. a) $f(x) = \ln(2x+3)$; $D_f =]-1{,}5\,;\infty[$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$

   $f\,'(x) = \dfrac{2}{2x+3}$ und $f\,'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$, also keine Hoch – bzw. Tiefpunkte

   b) $f(x) = \ln(x^2-2x)$; $D_f = \mathbb{R} \setminus [0;\,2]$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

   $f\,'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$ und $f\,'(x) > 0$ für $x \in]\,2;\,\infty[$ und $f\,'(x) < 0$ für $x \in]-\infty;0\,[$,

   also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte

   c) $f(x) = \ln(2+2x-x^2)$; ; $D_f =]\,1-\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3}\,[$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

   $f\,'(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2-2x-2}$ und $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$; HOP$(1\,;\ln 3) \approx (1\,;1{,}1)$

   d) $f(x) = \ln(\dfrac{2x-3}{x^2+1})$; $D_f =]\,1{,}5\,;\infty\,[$; NSt.: $f(x) = 0$ hat keine Lösung, also keine NSt.

   $f\,'(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-3} \cdot \dfrac{2\cdot(x^2+1)-(2x-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2\cdot(-x^2+3x+1)}{(2x-3)\cdot(x^2+1)}$; $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

   HOP$(x_1\,;f(x_1)) \approx (3{,}3\,;-1{,}2)$

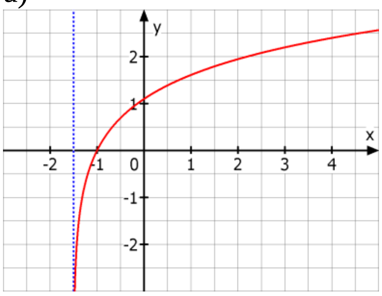
   e) $f(x) = \ln(\dfrac{2x}{x+1})$; $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1;\,0]$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

   $f\,'(x) = \dfrac{1}{x\cdot(x+1)}$ und $f\,'(x) > 0$ für $x \in]-\infty;\,-1[$ und $f\,'(x) > 0$ für $x \in]\,0;\,\infty\,[$,

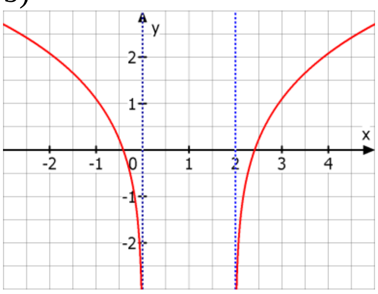
   also keine Hoch- bzw. Tiefpunkte

Bilder zu den Graphen:

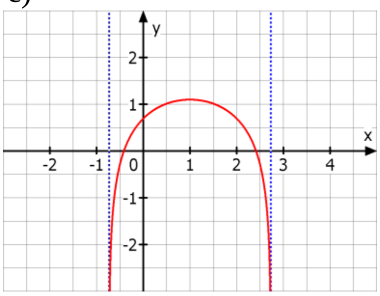
a)



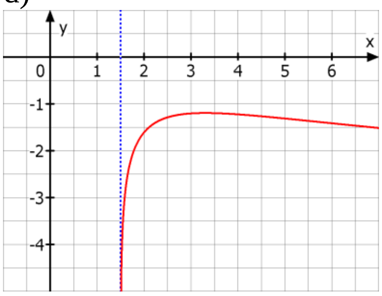
b)



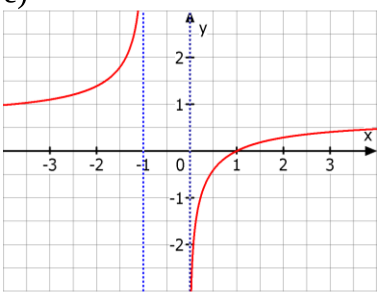
c)

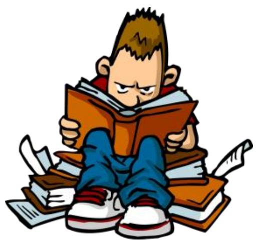


d)

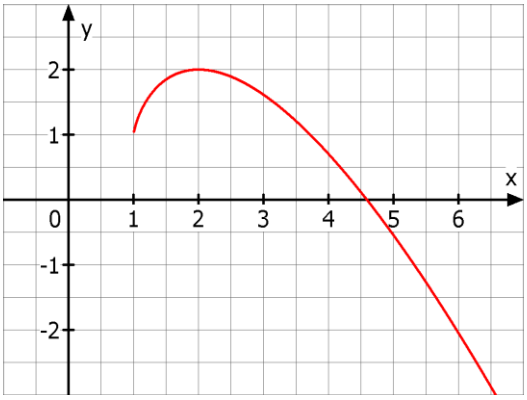


e)





2. $f(x) = x - (x-1)\cdot \ln(x-1)$.



a) $D_f =]\,1\,;\infty\,[$ und $f\,'(x) = -\ln(x-1)$

b) $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

$f\,'(x) > 0$ für $1 < x < 2$ und

$f\,'(x) < 0$ für $2 < x < \infty \Rightarrow HOP(2;2)$

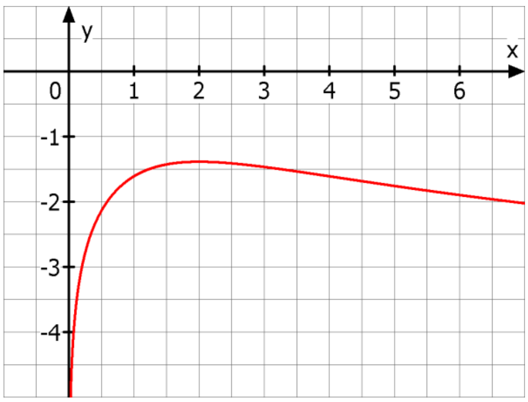
c) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} [x-(x-1)\cdot \ln(x-1)] = 1-0 = 1$

also gibt es keine Nullstelle im Intervall $]\,1\,;\,2]$.

f ist streng monoton fallend im Intervall $[\,2;\infty[$

und $f(4) \approx 0{,}70 > 0$ und $f(5) \approx -0{,}55$, also gibt es nur eine Nullstelle im Intervall $]\,4\,;\,5\,[$.

3. $f(x) = \ln(\dfrac{x}{x^2+4})$.



a) $D_f =]\,0\,;\infty\,[$ und $f\,'(x) = \dfrac{4-x^2}{x\cdot(x^2+4)}$

b) $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

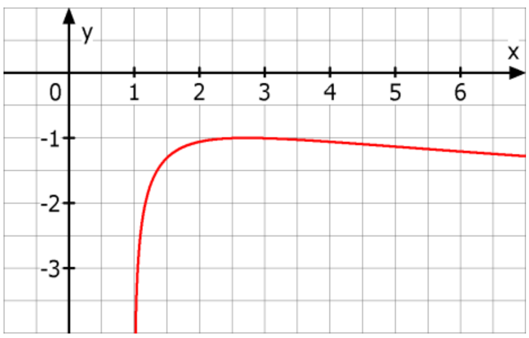
$f\,'(x) > 0$ für $x \in]0;2[$ und

$f\,'(x) < 0$ für $x \in]2;\infty[\Rightarrow$

$HOP(2;f(2)) \approx (2;-1{,}4)$

c) Da der Hochpunkt unterhalb der x-Achse liegt $[\,f(2) \approx -1{,}4 < 0\,]$, besitzt f keine Nullstelle.

4. $f(x) = \ln(\dfrac{\ln x}{x})$;



D_f : $\dfrac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ also $D_f =]1;\infty[$

$$f\,'(x) = \frac{x}{\ln x}\cdot\frac{x\cdot\frac{1}{x} - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x\cdot \ln x}$$

$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow x_1 = e \approx 2{,}718$

$f\,'(x) > 0$ für $x \in]1;e[$ und

$f\,'(x) < 0$ für $x \in]e;\infty[\Rightarrow$

$HOP(e;f(e)) = (e;-1)$, denn $f(e) = \ln\dfrac{\ln e}{e} = \ln\dfrac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$