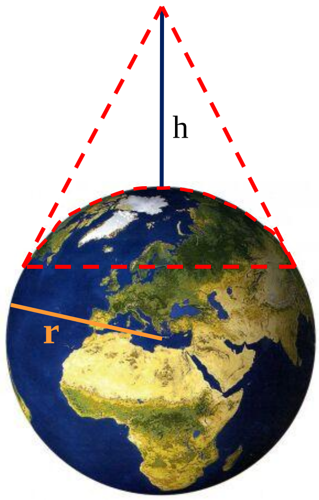
Q11 * Mathematik
Verhalten gebrochen rationaler Funktionen im Unendlichen



Aus der Höhe h über der Erdoberfläche kann man die Fläche einer so genannten Kugelkappe überblicken.

Für den Inhalt der Kugelkappe gilt:

$$A_{Kugelkappe} = A(h) = \frac{2\pi \cdot r^2 \cdot h}{r+h} \ ,$$

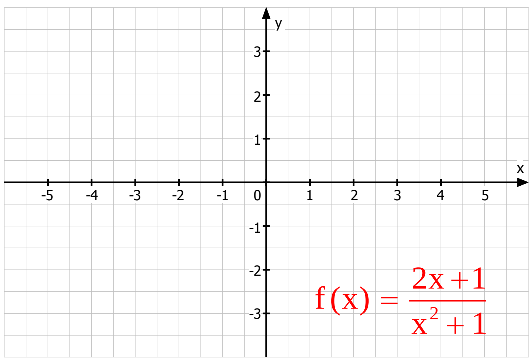
wobei r den Erdradius angibt.

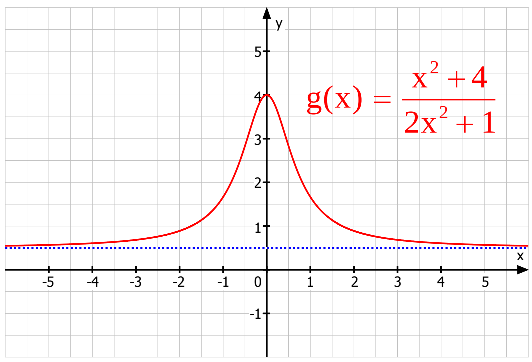
Je weiter man sich von der Erdoberfläche entfernt, umso größer wird diese Kugelkappe werden.

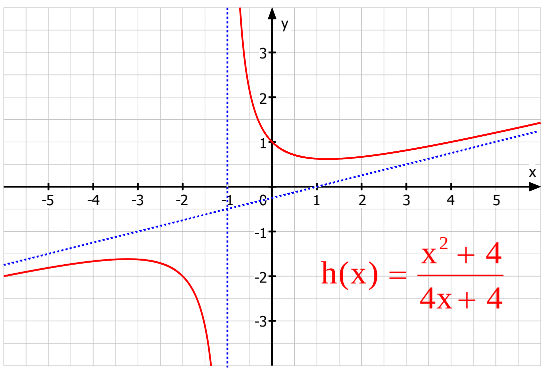
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{h\to\infty} A(h) = \lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{2\pi \cdot r^2 \cdot h}{r+h}$.

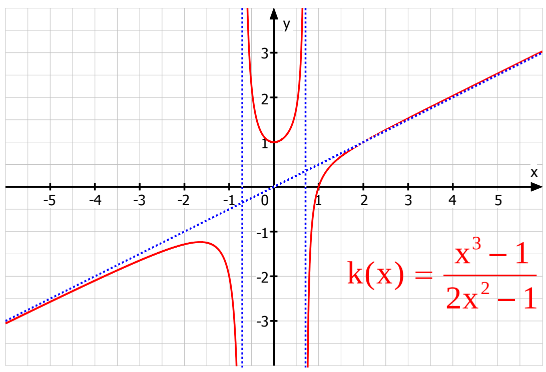
Vergleichen Sie Ihren Grenzwert mit dem bekannten Wert der Kugeloberfläche $A_{Kugel} = 4r^2\pi$.

Die vier abgebildeten Graphen besitzen waagrechte bzw. schräge Asymptoten für $x \to \pm\infty$.
Bestimmen Sie diese Asymptoten mit Hilfe geeigneter Grenzwertberechnungen.
Wie hängt die Art der Asymptote vom Grad des Zählers und Nenners ab?







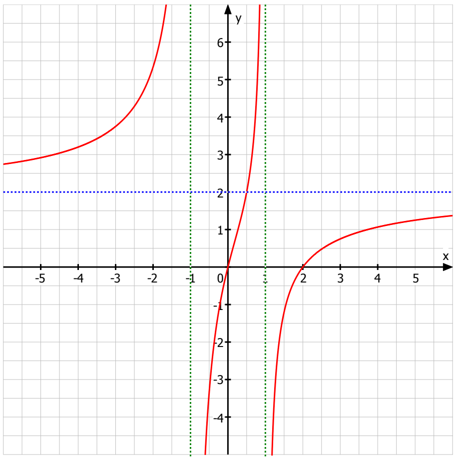


Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Asymptoten. Skizzieren Sie dann die Graphen und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit einem Funktionsplotter.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{x^2-1}$ b) $g(x) = \dfrac{1-3x^2}{2x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3+4x}{x-2x^2}$

Q11 * Mathematik
Verhalten gebrochen rationaler Funktionen im Unendlichen * Lösungen

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{x^2 - 1} = \dfrac{2x \cdot (x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}$, $D_f = R \setminus \{-1; 1\}$



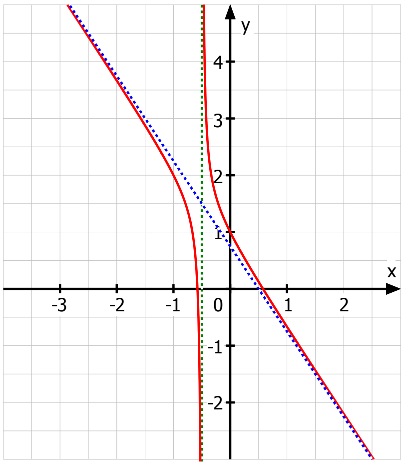
$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} \frac{2x\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} = "\frac{-2\cdot(-3)}{-2\cdot 0^{\pm}}" = \mp\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 1} \frac{2x\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} = "\frac{2\cdot(-1)}{0^{\pm}\cdot 2}" = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-4x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = "\frac{2\mp 0}{1+0}" = 2$$

Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

b) $g(x) = \dfrac{1-3x^2}{2x+1}$, $D_f = R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$



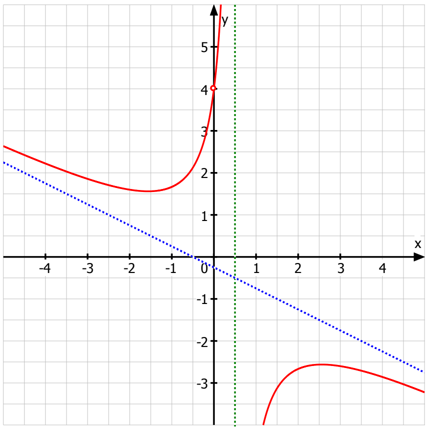
$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -0,5} g(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -0,5} \frac{1-3x^2}{2x+1} = "\frac{0,25}{0^{\pm}}" = \pm\infty$$

$$g(x) = (-3x^2+1):(2x+1) = -1,5x + 0,75 - \frac{0,25}{2x+1}$$

wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{0,25}{2x+1} = 0$ ist also

$y = -1,5x + 0,75$ eine Asymptote für $x \to \pm\infty$.

c) $f(x) = \dfrac{x^3+4x}{x-2x^2} = \dfrac{x\cdot(x^2+4)}{x\cdot(1-2x)} = \dfrac{x^2+4}{1-2x}$, $D = R \setminus \{0 ; 0,5\}$



$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0,5} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0,5} \frac{x^2+4}{1-2x} = "\frac{4,25}{0^{\mp}}" = \mp\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0} \frac{x^2+4}{1-2x} = \frac{4}{1} = 4$$

$$f(x) = \frac{x^2+4}{1-2x} = -0,5x - 0,25 + \frac{4,25}{1-2x}$$

wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4,25}{1-2x} = 0$ ist also

$y = -0,5x - 0,25$ eine Asymptote für $x \to \pm\infty$.