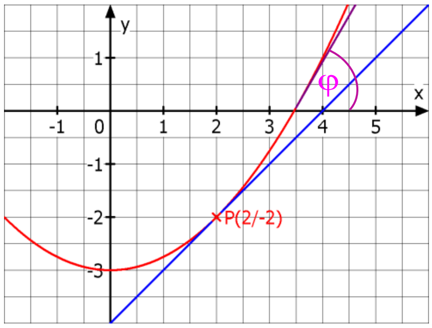
Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Differentialquotienten

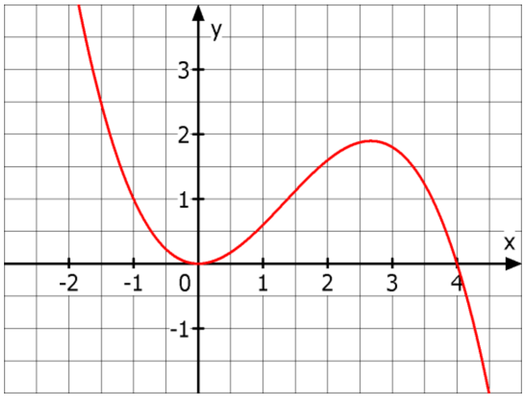
1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^2 - 3$.



   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P(2/-2) des Graphen von f .

   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt des Graphen G_f mit der positivem x-Achse.
   Unter welchem Winkel φ schneidet die Tangente an G_f in diesem Punkt die x-Achse.
   (Man sagt kurz: Der Graph G_f schneidet die x-Achse unter dem Winkel φ.)

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}8x^2 - 0{,}2x^3$



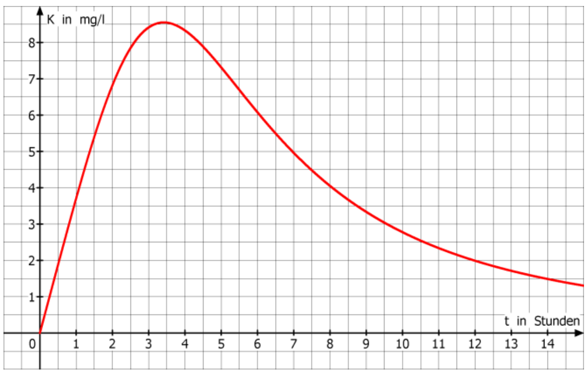
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
   Berechnen Sie die Steigung des Graphen G_f in diesen Nullstellen.
   Unter welchem Winkel schneidet G_f die x-Achse?

   b) Bestimmen Sie die Steigung von G_f in den Punkten (-1/?) und (2/?).

   c) Zeigen Sie, dass die Steigung von G_f an einem beliebigen Punkt (x_o/y_o) den Wert $m = m(x_o) = 1{,}6\,x_o - 0{,}6\,x_o^2$ besitzt.

   d) Die Funktion f besitzt im Intervall [2 ; 3] ersichtlich ein lokales Maximum.
   Wie kann man dieses Maximum rechnerisch ermitteln?

3. Die Konzentration K = K(t) eines Medikaments im Blut eines Patienten hängt von der Zeit t nach Einnahme dieses Medikaments ab.
   Wird K in Milligramm pro Liter und t in Stunden gemessen, so kann man näherungsweise K durch folgende Funktion beschreiben:
   $$K(t) = \frac{300 \cdot t}{80 + t^3}$$



   Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Hilfe des angegebenen Graphen von K.

   a) Zu welchem Zeitpunkt ist die Konzentration des Medikaments am größten?

   b) Wie groß ist die Änderungsrate der Konzentration in der ersten Stunde nach der Einnahme?

   c) Wann etwa wird das Medikament am stärksten abgebaut? Wie groß ist diese stärkste Abnahme ungefähr?

   d) Geben Sie einen mathematischen Rechenausdruck an, mit dem sich die Änderungsrate der Konzentration 10 Stunden nach Einnahme des Medikaments ermitteln lässt.
   (Für Experten: Versuchen Sie den Wert dieses Rechenterms zu ermitteln!)

Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Differentialquotienten * Lösungen

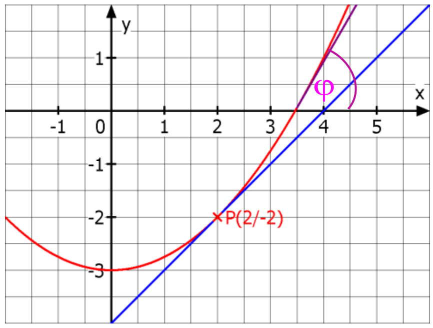
1. a) Tangentensteigung m:

$$m = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{0,25x^2-3-(-2)}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{0,25x^2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{4\cdot(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{4} = 1$$

Tangentengleichung: $y = x-4$



b) Nullstellen von f:

$0,25x^2-3=0 \iff x^2=12 \iff x_{1/2}=\pm\, 2\cdot\sqrt{3}$ also hier $x_1=2\cdot\sqrt{3}$

Tangentensteigung im Punkt $(x_1/0)$:

$$m = \lim_{x\to 2\cdot\sqrt{3}}\frac{f(x)-0}{x-2\cdot\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2\cdot\sqrt{3}}\frac{0,25x^2-3}{x-2\cdot\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2\cdot\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{4\cdot(x-2\cdot\sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x\to 2\cdot\sqrt{3}}\frac{(x+2\cdot\sqrt{3})}{4} = \frac{2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$ und wegen $m=\tan\varphi$ folgt

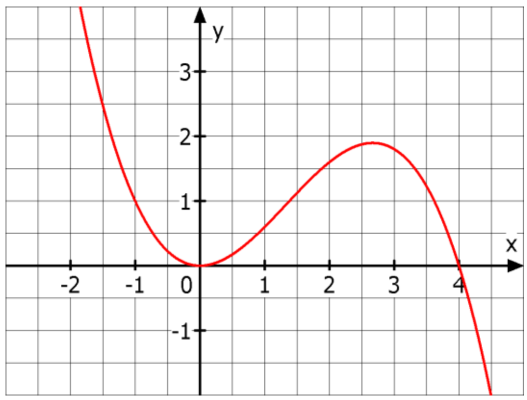
$$\varphi = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

2. a) Nullstellen:

$f(x)=0 \iff 0,8x^2-0,2x^3=0 \iff$

$0,2\cdot x^2(4-x)=0 \iff x_1=0\,;\ x_2=4$

Bei x_1 liegt eine doppelte NSt. vor, d.h. der Graph geht nicht durch die x-Achse!



Steigung m_1 bei (0/0):

$$m_1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0,8x^2-0,2x^3}{x} =$$

$\lim\limits_{x\to 0} 0,8x-0,2x^2 = 0$ (Kein Schnitt, d.h. $\varphi=0^\circ$)

Steigung m_2 bei (4/0): $m_2=\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-0}{x-4} =$

$$\lim_{x\to 4}\frac{0,8x^2-0,2x^3}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{0,2x^2(4-x)}{x-4} = \lim_{x\to 4}-0,2x^2 = -0,2\cdot 16 = -3,2$$

Schnittwinkel bei (4/0): $\varphi = \tan^{-1}(-3,2) \approx -72,6^\circ$

b) $$m(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{0,8x^2-0,2x^3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(-0,2x^2+x-1)\cdot(x+1)}{x+1} =$$

$$\lim_{x\to -1}(-0,2x^2+x-1) = -0,2-1-1 = -2,2$$

$$m(-1)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{0,8x^2-0,2x^3-1,6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(-0,2x^2+0,4x+0,8)\cdot(x-2)}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2}(-0,2x^2+0,4x+0,8) = -0,8+0,8+0,8 = 0,8$$

c) $m(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{0{,}8x^2 - 0{,}2x^3 - (0{,}8x_o^2 - 0{,}2x_0^3)}{x - x_o} =$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{0{,}8x^2 - 0{,}8x_o^2 - 0{,}2x^3 + 0{,}2x_0^3}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{0{,}8 \cdot (x^2 - x_o^2)}{x - x_o} - \frac{0{,}2 \cdot (x^3 - x_o^3)}{x - x_o} =$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{0{,}8 \cdot (x - x_o) \cdot (x + x_o)}{x - x_o} - \frac{0{,}2 \cdot (x^2 + x \cdot x_o + x_o^2) \cdot (x - x_o)}{x - x_o} =$$

$$\lim_{x \to x_o} 0{,}8 \cdot (x + x_o) - 0{,}2 \cdot (x^2 + x \cdot x_o + x_o^2) = 0{,}8 \cdot 2x_o - 0{,}2 \cdot 3x_o{}^2 = 1{,}6x_o - 0{,}6x_o^2$$

d) An der Stelle x_3 mit dem lokalen Maximum muss ersichtlich die Steigung der Tangente 0 ergeben, d.h. es muss gelten

$$0 = m(x_3) = 1{,}6x_o - 0{,}6x_o^2 \Leftrightarrow 0 = 0{,}2 \cdot x_o \cdot (8 - 3x_o) \Leftrightarrow x_4 = 0 \text{ und damit } x_3 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

Das lokale Maximum bei x_3 hat damit den Wert $f(\frac{8}{3}) = \dfrac{256}{135} \approx 1{,}90$.

4. a) Die Konzentration des Medikaments ist etwa 3,4 Stunden nach der Einnahme am größten.

b) Die Änderungsrate der Konzentration beträgt während der gesamten ersten Stunde recht konstant 4,0 Milligramm pro Stunde.

c) Der stärkste Abbau des Medikaments findet zu dem Zeitpunkt statt, an dem die Kurve am stärksten fällt; dies ist etwa 5,5 Stunden nach der Einnahme der Fall.

d) Die Änderungsrate der Konzentration 10 Stunden nach der Einnahme lässt sich mit dem folgenden Rechenausdruck ermitteln:

$$\lim_{t \to 10} \frac{K(t) - K(10)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{\frac{300t}{80 + t^3} - \frac{3000}{1080}}{t - 10}$$

Expertenaufgabe:

$$\lim_{t \to 10} \frac{K(t) - K(10)}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{\frac{300t}{80 + t^3} - \frac{3000}{1080}}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{\frac{300t}{80 + t^3} - \frac{25}{9}}{t - 10} =$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{\frac{300t \cdot 9 - 25 \cdot (80 + t^3)}{(80 + t^3) \cdot 9}}{t - 10} = \lim_{t \to 10} \frac{300t \cdot 9 - 25 \cdot (80 + t^3)}{(80 + t^3) \cdot 9 \cdot (t - 10)} = \lim_{t \to 10} \frac{-25t^3 + 2700t - 2000}{(80 + t^3) \cdot 9 \cdot (t - 10)} =$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{-25t^3 + 2700t - 2000}{(80 + t^3) \cdot 9 \cdot (t - 10)} = \lim_{t \to 10} \frac{(-25t^2 - 250t + 200) \cdot (t - 10)}{(80 + t^3) \cdot 9 \cdot (t - 10)} =$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{(-25t^2 - 250t + 200)}{(80 + t^3) \cdot 9} = \frac{-2500 - 2500 + 200}{1080 \cdot 9} = -\frac{4800}{1080 \cdot 9} = -\frac{40}{81} \approx -0{,}49$$

Die Änderungsrate des Medikaments beträgt 10 Stunden nach der Einnahme also etwa $-0{,}49 \dfrac{mg}{\text{Liter}}$, wobei das Minuszeichen angibt, dass die Konzentration abnimmt.