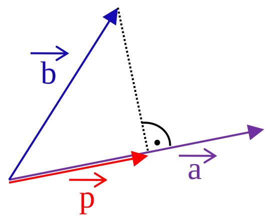
Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Skalarprodukt

Merke: Für die **Projektion** $\vec{p}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \circ \vec{a}}{\vec{a} \circ \vec{a}} \cdot \vec{a}$$



1. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A(1 / – 2 / 3), B(5 / 2 / 1) und C(1 / 1 / 0).

2. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3), B(2 / – 2 / 4) und C(4 / – 6 / 4).
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen.
   b) Finden Sie einen Punkt P, der von dieser Ebene den Abstand 6 hat.

3. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3), B(2 / 2 / – 5) und P(4 / – 5 / 12).
   Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

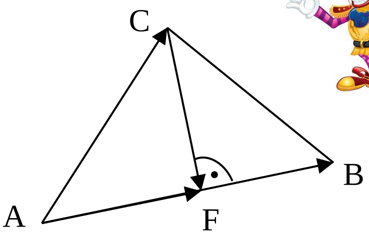
4. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3) und B(5 / 4 / – 9).
   a) Finden Sie einen Punkt C so, dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit Basis [AB] ist.
   b) Finden Sie einen Punkt D so, dass das Dreieck ABD den Flächeninhalt $21 \cdot \sqrt{5}$ besitzt.

5. Gegeben sind die Punkte A(1 / – 2 / 3), B(0 / 2 / 11) und C(3 / 0 / 2).
   a) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle BAC$.
   b) Finden Sie einen Punkt P ($P \neq A$), der auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels $\sphericalangle BAC$ liegt.

6. Gegeben sind die Punkte A(0 / 0 / 0), B(2 / 6 / 0), C(7 / 1 / 0) und S(3 / 2 / 5).
   a) Zeichnen Sie ein sauberes Schrägbild der Pyramide ABCS. (Platzbedarf: $\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 4 & 0 & 6 \\ & 4 & \end{array}$)
   b) Unter welchen Winkeln laufen die drei Kanten der Pyramide in der Spitze S zusammen?
   c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks CBS.
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   e) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Skalarprodukt * Lösungen

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$;

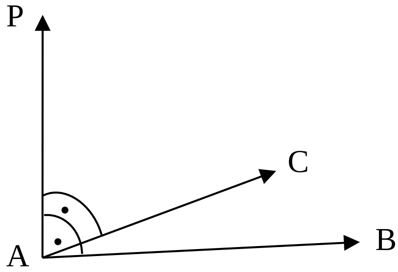


F ist der Fußpunkt des Lots von C auf [AB]

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{0+12+6}{16+16+4} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; \ \vec{F} = \overrightarrow{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{also } F(3/0/2).$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16+16+4} \cdot \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2 + (2-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{AC}$ für jedes $r \in R$



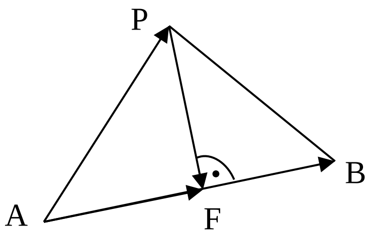
$\Rightarrow$ A, B und C spannen eine Ebene auf.

b) Wähle P so, dass $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AC}$ gilt.

für $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ n_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$; $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3 \cdot 1 - 4 \cdot n_2 + 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow n_2 = \frac{1}{2}$ also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AP} = 6 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{2,25}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{AP} + \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{also } P(5/0/-1)$$

3. Berechne die Projektion $\overrightarrow{AF}$ von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$:

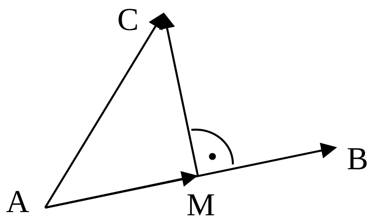


$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ und damit $d(P; AB) = \overline{PF}$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3-12-72}{1+16+64} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ -4-2 \\ 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{also } F(0/-6/11) \text{ und } d(P; AB) = \overline{PF} = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

4. a) M ist der Mittelpunkt der Strecke [AB]; wähle dann $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{AB}$

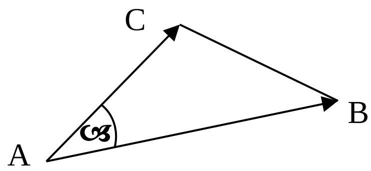


$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} ; \ \vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \text{ z.B. } \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{MC} + \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{also } C(3/3/-2)$$

b) Es muss gelten $21\cdot\sqrt{5} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{MD} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{4+9+36}\cdot\overline{MD} = 7\cdot\overline{MD} \Rightarrow \overline{MD} = 3\cdot\sqrt{5}$

z.B. $\overrightarrow{MD} = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{0+2^2+1^2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \overrightarrow{MD} + \vec{M} = \begin{pmatrix}0+3\\6+1\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}$ also $D(3/7/0)$



5. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\4\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$;

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2+8-8}{\sqrt{1+16+64}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{-2}{27} \Rightarrow \alpha = 94,248...^{\circ} \approx 94,2^{\circ}$$

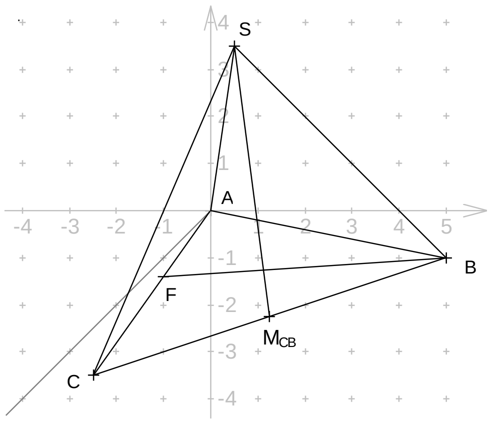
b) Für einen Punkt P auf der Winkelhalbierenden gilt

$$\overrightarrow{AP} = r\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \text{ mit } r\in R; \text{ also z.B. } \overrightarrow{AP} = 9\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) =$$

$$= 9\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\10\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{AP} + \vec{A} = \begin{pmatrix}5-1\\10-2\\5+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} \text{ also } P(4/8/8)$$

6. b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}$;

a)



$\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix}$;

$$\cos(\sphericalangle CSB) = \frac{\overrightarrow{SC}\circ\overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SC}|\cdot|\overrightarrow{SB}|} = \frac{-4-4+25}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{42}} = \frac{17}{42} \Rightarrow$$

$\sphericalangle CSB \approx 66,1^{\circ}$; entsprechend $\sphericalangle BSA \approx 60,0^{\circ}$ und $\sphericalangle ASC \approx 67,9^{\circ}$

c) Das Dreieck CBS ist gleichschenklig, denn es gilt $\overline{SC} = \overline{SB} = \sqrt{42}$

Für den Mittelpunkt M_{CB} von $[CB]$ gilt

$M_{CB} = (4,5/3,5/0)$ und $\overline{SM_{CB}} = \sqrt{(3-4,5)^2+(2-3,5)^2+5^2} = \sqrt{29,5}$ also

$A_{\Delta CBS} = \frac{1}{2}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{SM_{CB}} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{29,5} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{59}$

d) Für den Fußpunkt F des Lots von B auf AC gilt:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{AC}}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{14+6+0}{49+1+0}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,8\\0,4\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{F} = \overrightarrow{AF} + \vec{A} = \begin{pmatrix}2,8\\0,4\\0\end{pmatrix}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BF} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2-2,8)^2+(6-0,4)^2} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32} = 20$$

e) Da S den Abstand $h = 5$ von der x_1-x_2-Ebene hat, gilt für das Volumen der Pyramide

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 20\cdot 5 = \frac{100}{3} .$$