Q11 * Mathematik * Übungsaufgaben zum Skalarprodukt

1. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3) und B(3/0/2).
   a) Bestimmen Sie einen Punkt C so, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
   b) Bestimmen Sie nun den Flächeninhalt dieses Dreiecks ABC.
   c) Bestimmen Sie einen Punkt C so, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt 6,75 hat.

2. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(3/3/5) und C(1/5/6).
   a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann und bestimmen Sie die Koordinaten dieses vierten Eckpunktes D.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ABCDS das Volumen V = 18 besitzt.

3. Gegeben sind die Punkte A(3/2/1) und B(4/6/9).
   Finden Sie jeweils Punkte mit ganzzahligen Koordinaten so, dass gilt:
   a) ABCD ist eine Raute,
   b) ABCD ist ein Rechteck,
   c) ABCD ist ein gleichschenkliges Trapez aber kein Rechteck,
   d) (für Tüftler) ABCD ist ein Quadrat.

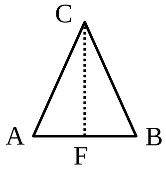
4. Gegeben sind die Punkte A(1/2/-3), B(4/-1/3) und P(3/4/0).
   Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

5. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(5/-2/1) und C_k (3+2k / k / 2+2k) mit $k \in R$.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC_k für fast jedes $k \in R$ gleichschenklig ist.
   b) Wo liegen alle diese Punkte C_k ?
      Für welches $k \in R$ ist ABC_k kein Dreieck?
   c) Für welches $k \in R$ hat das Dreieck den Flächeninhalt 18 ?

6. Gegeben sind die Punkte A(3/-3/4), B(9/0/1), C(2/4/-1) und D(-1/1/-4).
   a) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden AB und CD windschief sind.
   b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden windschiefen Geraden voneinander.

Q11 * Mathematik * Übungsaufgaben zum Skalarprodukt * Lösungen

1. a) A(1/2/3) , B(3/0/2). Wähle [AB] als Basis



$$\vec{F} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}; \text{ wähle } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

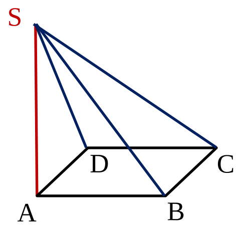
z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \vec{F} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ b) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 4{,}5$

c) $6{,}75 = A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left|\overrightarrow{FC}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{FC}\right| = 4{,}5$ und $\vec{C} = \vec{F} + 1{,}5\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$

2. a) A(1/2/3), B(3/3/5) und C(1/5/6).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \text{ also } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \text{ und } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3$$

daher $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$



b) Wähle S senkrecht über z.B. dem Punkt A im Abstand h = 6,

denn aus $18 = V = \frac{1}{3}\cdot A_{ABCD}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot h$ folgt $h = 3$.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$ liefert z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{n}\right| = 3$, also $\vec{S} = \vec{A} + 2\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Gegeben sind die Punkte A(3/2/1) und B(4/6/9).

a) Für eine Raute muss gelten $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| \nparallel \left|\overrightarrow{BC}\right|$

und mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ z.B. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $\vec{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Für eine Rechteck muss gelten $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

und mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ z.B. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Verwende für das gleichschenklige Trapez das Rechteck aus b) und wähle z.B.

$$\vec{C}_{neu} = \vec{C} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{D}_{neu} = \vec{D} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

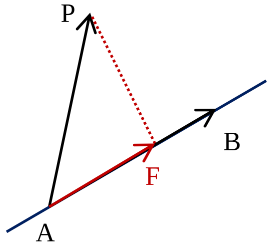
b) Für eine Quadrat muss gelten $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ und $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+16+64} = 9$

zu $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ passt $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $\vec{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Die Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert den Fusspunkt F des Lots.

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{-18}{54} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und damit } \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und $d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$



5. a) $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \ldots = \sqrt{9k^2+9} = 3 \cdot \sqrt{k^2+1}$ und $\left|\overrightarrow{BC_k}\right| = \sqrt{9k^2+9} = 3 \cdot \sqrt{k^2+1}$

b) Die Punkte C_k liegen auf einer Mittelsenkrechten zur Strecke [AB].
Falls C_k genau die Mitte M von [AB] ist, liegt kein Dreieck vor.
$M_{[AB]} = (3/0/2) = C_0$ also $k = 0$.

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16+4} = 6$ und $M(3/0/2)$

$18 = A_{\Delta ABC_k} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MC_k}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{MC_k}\right| = 6$ und $\left|\overrightarrow{MC_k}\right| = \sqrt{4k^2+k^2+4k^2} = 3 \cdot |k| \Rightarrow$

$|k| = 2$ und $k_{1/2} = \pm 2$

6. Gegeben A(3/-3/4), B(9/0/1), C(2/4/-1) und D(-1/1/-4).

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ also $\overrightarrow{AB} \neq r \cdot \overrightarrow{DC}$ für alle $r \in R$

Die Annahme $AB \cap CD = \{S\}$ führt zu einem Widerspruch, also sind AB und CD windschief.

b) gesucht $\vec{n}$ mit $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{CD}$,

das liefert z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF_2} = k \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \vec{n}$ und $\overrightarrow{AF_2} = \overrightarrow{AD} + s \cdot \overrightarrow{DC}$ liefert

$t = -2$ und $k = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{4}{3}$ und daher

$F_1(7/-1/2)$ und $F_2(3/5/0)$ und der gesuchte

Abstand lautet $d = \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = 2 \cdot \sqrt{14}$