

Q11 * Mathematik * Standardaufgaben zur analytischen Geometrie

1. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(5/2/5)$, $C(1/4/7)$ und $P(-1/12/1)$.
 - a) Bestimmen Sie die Seitenlängen \overline{AB} und \overline{AC} .
 - b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ im Dreieck ABC.
 - c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
 - d) Bestimmen Sie die Seitenmitten M_c und M_b der Seiten $[AB]$ bzw. $[AC]$.
 - e) Bestimme den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden (auf zwei unterschiedliche Arten).
 - f) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite $[AB]$.
 - g) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (auf zwei Arten).
 - h) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden AB (auf zwei Arten).
 - i) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide ABCP.
 - j) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E , die durch das Dreieck ABC festgelegt wird.
 - k) Für Experten:
Bestimmen Sie den Mittelpunkt N des Umkreises zum Dreieck ABC!

2. Die Gerade g geht durch die Punkte $A(1/2/3)$ und $B(4/-7/9)$.
Der Punkt $P(10/3/7)$ soll an der Geraden AB gespiegelt werden.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P^* .

3. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/3/1)$ und $C(5/1/2)$.
 - a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ist.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
 - b) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann.
Bestimmen Sie die Koordinaten von D.
 - c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes S so, dass die Pyramide ABCDS gerade ist (d.h. S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats ABCD) und diese Pyramide das Volumen 27 besitzt.



Q11 * Mathematik * Standardaufgaben zur analytischen Geometrie * Lösungen

1. a) $|\overline{AB}| = \sqrt{16+0+4} = 2 \cdot \sqrt{5}$ und $|\overline{AC}| = \sqrt{0+4+16} = 2 \cdot \sqrt{5}$

b) $\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 66,42...^\circ \approx 66,4^\circ$

c) $\overline{D} = \overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{C} - \overline{B} \Rightarrow D(-3/4/5)$

d) $\overline{M}_c = \overline{A} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A} + \overline{B}) \Rightarrow M_c(3/2/4)$

$\overline{M}_b = \overline{A} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{A} + \overline{C}) \Rightarrow M_b(1/3/5)$

e) S ist der Schwerpunkt, also $\overline{S} = \frac{1}{3} \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \Rightarrow S(\frac{7}{3}/\frac{8}{3}/5)$ oder

$\overline{S} = \overline{B} + \frac{2}{3} \cdot \overline{BM}_b \Rightarrow S(\frac{7}{3}/\frac{8}{3}/5)$

f) Projektion: $\overline{F} - \overline{A} = \overline{AF} = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{\overline{AB} \circ \overline{AB}} \cdot \overline{AB} = \frac{8}{20} \cdot \overline{AB} = \frac{2}{5} \cdot \overline{AB} \Rightarrow F(2,6/2/3,8)$

g) $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{CF}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{1,6^2 + 2^2 + 3,2^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{105} = 2\sqrt{21}$

$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{1+16+4} = 2 \cdot \sqrt{21}$

h) $h = |\overline{CF}| = \sqrt{1,6^2 + 2^2 + 3,2^2} = \sqrt{\frac{84}{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{105}$

$2 \cdot \sqrt{21} = F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CF} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{4 \cdot \sqrt{21}}{\overline{AB}} = \frac{4 \cdot \sqrt{21}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{105}}{5}$

i) $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AP} \circ (\overline{AB} \times \overline{AC})| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |8 - 160 - 16| = \frac{168}{6} = 28$

j) $28 = V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{21} \cdot h \Rightarrow h = \frac{28 \cdot 3}{2 \cdot \sqrt{21}} = \frac{42 \cdot \sqrt{21}}{21} = 2 \cdot \sqrt{21}$

Und diese Höhe h stimmt mit dem Abstand des Punktes P von der Ebene E überein.

k) $N = N(\frac{17}{7}/\frac{19}{7}/\frac{36}{7})$

2. Fußpunkt F des Lots von P auf AB.

$\overline{F} - \overline{A} = \overline{AF} = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{\overline{AB} \circ \overline{AB}} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \Rightarrow F(2/-1/5)$

$\overline{P}^* - \overline{F} = \overline{FP}^* = \overline{PF} \Rightarrow \overline{P}^* = \overline{F} + \overline{PF} \Rightarrow P^*(-6/-5/3)$



$$3. \text{ a) } \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ \text{ und } |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 \Rightarrow$$

$$\Delta ABC \text{ ist rechtwinklig mit Flächeninhalt } F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5$$

$$\text{b) } \overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow D(3/0/4)$$

$$\text{c) Senkrechte auf die Ebene: } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } |\vec{n}| = 9 \text{ und } \overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$27 = V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot h \Rightarrow h = 9 \text{ und } \vec{S} = \overrightarrow{M} \pm \vec{n} \Rightarrow \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ -3,5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 8,5 \end{pmatrix}$$