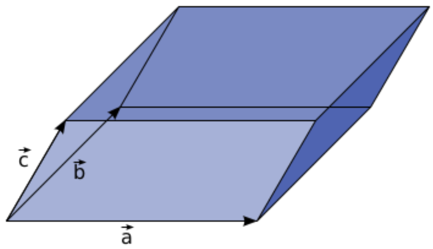
Q11 * Mathematik * Anwendungen des Vektorprodukts

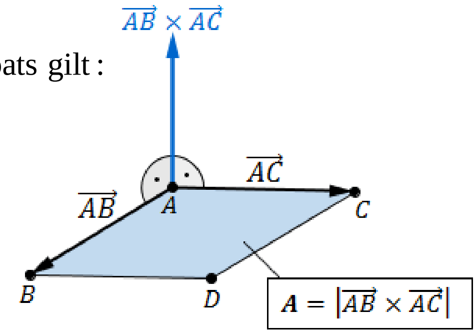
Für den Flächeninhalt A des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gilt:

$A = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

Für das Volumen des durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats gilt:

$A = \left| \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \right|$





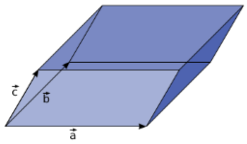
Zwei Aufgaben

1. Gegeben sind die Punkte A(1/-2/3), B(3/4/-3), C(3/1/0) und S(2/3/- 4).
   a) Das Dreieck ABC lässt sich zu einem Parallelogramm ABCD ergänzen. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   c) Berechnen Sie das Volumen des Spats, der von den drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$ aufgespannt wird.
   d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

2. Gegeben sind die Punkte A(3/2/1), B(2/4/2), C(6/4/4) und D(0/7/- 4).
   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCD.
   c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt.
   d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F des Lots von D auf die Ebene E.

Q11 * Mathematik * Anwendungen des Vektorprodukts

1. A(1/-2/3) , B(3/4/-3) , C(3/1/0) und S(2/3/- 4)



$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\6\\-6\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix}$$

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{D}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}+\vec{A}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\6\end{pmatrix}$ also $D(1/-5/6)$

$$A_{\square ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\6\\-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-6\\-6\end{pmatrix}\right|=6\cdot\sqrt{2}$$

b) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot A_{\square ABCD}=3\cdot\sqrt{2}$

c) $V_{Spat}=\left|\overrightarrow{AS}\circ\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\6\\-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-6\\-6\end{pmatrix}\right|=\left|-30+42\right|=12$

d) $V_{Pyramide}=\frac{1}{6}\cdot V_{Spat}=\frac{1}{6}\cdot 12=2$

2. A(3/2/1) , B(2/4/2) , C(6/4/4) , D(0/7/- 4)

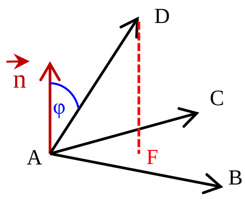
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\5\\-5\end{pmatrix}$$

a) $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16+36+64}=\sqrt{29}$

b) $V_{Pyramide}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AD}\circ\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\5\\-5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|-12+30+40\right|=\frac{29}{3}$

c) $V_{Pyramide}=\frac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABC}\cdot h$ und $h=d(D;E)$ also $d(D;E)=\frac{3\cdot V_{Pyramide}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{3\cdot 29}{\sqrt{29}\cdot 3}=\sqrt{29}$

d) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ und $\vec{n}\circ\overrightarrow{AD}=58>0\Rightarrow\varphi<90^o$ also



$$\overrightarrow{DF}=-\,d(D;E)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=-\sqrt{29}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{29}}\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}$$

und $\vec{F}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}+\vec{D}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$; $F(-2/4/0)$

[zur Kontrolle: $\overrightarrow{AF}=2\cdot\overrightarrow{AB}-1\cdot\overrightarrow{AC}$]