Q11 * Mathematik * Linear unabhängige Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear unabhängig, wenn sie eine Ebene „aufspannen". Jeder Vektor der Ebene lässt sich dann eindeutig als Linearkombination dieser beiden Vektoren darstellen. Diese zwei Vektoren nennt man dann auch eine Basis dieser Ebene.

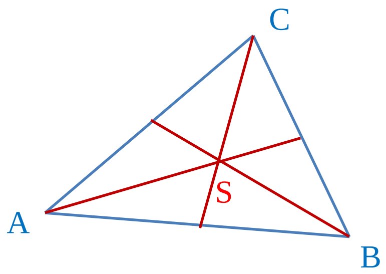
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen linear unabhängig, wenn sie einen Raum „aufspannen". Jeder Vektor des Raums lässt sich dann eindeutig als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen. Diese drei Vektoren nennt man dann auch eine Basis des Raums.

1. a) Zeigen Sie, dass für den Mittelpunkt M einer Strecke [AB] gilt:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A} + \vec{B})$$

b) Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden in einem Dreieck ABC wird Schwerpunkt genannt.
Zeigen Sie, dass für den Schnittpunkt S gilt:

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

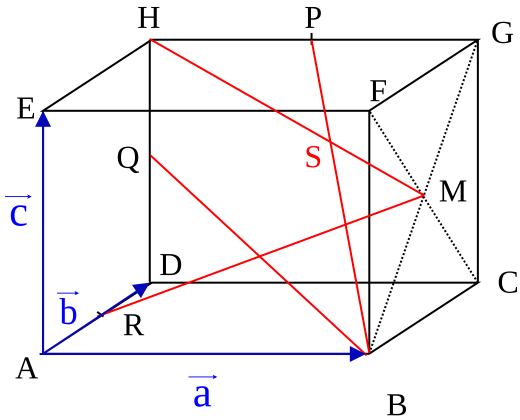


2. Das Bild zeigt einen Quader ABCDEFGH.

R halbiert die Strecke [AD] und P halbiert die Strecke [HG] und Q halbiert die Strecke [DH].
M ist der Mittelpunkt des Rechtecks BCGF.

Führen Sie die folgenden Rechnung mit den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ durch.

(Diese drei Vektoren bilden eine Basis des Raums!)



a) Begründen Sie, dass sich die Geraden HM und PB in einem Punkt S schneiden.
In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [HM].

b) Begründen Sie, dass sich die Geraden RM und PB nicht schneiden,

c) Schneiden sich die Geraden RM und QB ?
Begründen Sie Ihre Aussage geometrisch und analytisch (also mit einer Rechnung).

Q11 * Mathematik * Linear unabhängige Vektoren * Lösungen

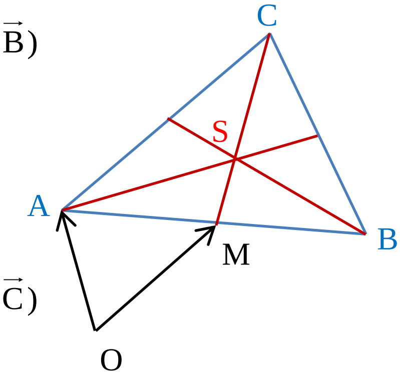
1. a) Zeigen Sie, dass für den Mittelpunkt M einer Strecke [AB] gilt:

$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{B}-\vec{A}\right) = \frac{1}{2}\cdot\vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

b) $\vec{S} = \vec{C} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CM} = \vec{C} + \frac{2}{3}\cdot\vec{M} - \frac{2}{3}\cdot\vec{C} = \frac{1}{3}\cdot\vec{C} + \frac{2}{3}\cdot\vec{M}$

und mit $\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{B})$ folgt

$$\vec{S} = \frac{1}{3}\cdot\vec{C} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{1}{3}\cdot\vec{C} + \frac{1}{3}\cdot\vec{A} + \frac{1}{3}\cdot\vec{B} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$$



2. a) Die Geraden HM und PB liegen beide in der durch das Rechteck ABGH festgelegten Ebene. (Man könnte damit auch die folgende Rechnung nur in dieser Ebene durchführen.) Die Rechnung im Raum ist etwas umfangreicher aber auch lehrreicher.

Wir erstellen zunächst den Vektor $\overrightarrow{BS}$ auf zweierlei Arten, einmal über die Gerade BP und dann über die Gerade MH.

$\overrightarrow{BS} = r\cdot\overrightarrow{BP}$ mit $r\in\mathbb{R}$ und $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BM} + t\cdot\overrightarrow{MH}$ mit $t\in\mathbb{R}$

(Ersichtlich muss gelten $r \in]\,0\,,1\,[$ und $t \in]\,0\,,1\,[$.)

$\overrightarrow{BS} = r\cdot\overrightarrow{BP} = r\cdot(\vec{b}+\vec{c}-0{,}5\cdot\vec{a}) = -0{,}5\cdot r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b} + r\cdot\vec{c}$

$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{BM} + t\cdot\overrightarrow{MH} = 0{,}5\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot c + t\cdot(0{,}5\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot\vec{c} - \vec{a}) =$

$-t\cdot\vec{a} + (0{,}5+0{,}5\cdot t)\cdot\vec{b} + (0{,}5+0{,}5\cdot t)\cdot\vec{c}$

also $-0{,}5\cdot r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b} + r\cdot\vec{c} = \overrightarrow{BS} = -t\cdot\vec{a} + (0{,}5+0{,}5\cdot t)\cdot\vec{b} + (0{,}5+0{,}5\cdot t)\cdot\vec{c}$

Wegen der eindeutigen Darstellung von Vektoren durch die drei Basisvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ müssen damit drei Gleichungen erfüllt sein:

(1) $-0{,}5\cdot r = -t$ und (2) $r = (0{,}5+0{,}5\cdot t)$ und (3) $r = (0{,}5+0{,}5\cdot t)$

d.h. (1) $0{,}5\cdot r = t$ und (2) $r = 0{,}5 + 0{,}5\cdot t \Leftrightarrow r = 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot r \Leftrightarrow$

$r = 0{,}5 + 0{,}25\,r \Leftrightarrow 0{,}75\,r = 0{,}5 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$ und $t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

S teilt damit die Strecke $[HM]$ im Verhältnis $\overline{HS} : \overline{SM} = (1-t) : t = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$

b) Ist M_1 der Schnittpunkt der Diagonalen im Rechteck ADHE, und M_2 der Mittelpunkt von [BC], so liegt die Gerade RM in der durch M, M_1, R und M_2 festgelegten Ebene E_1 . PB liegt in der durch A, B, G und H festgelegten Ebene E_2.
Ebene E_1 und Ebene E_2 schneiden sich in der Geraden M_1M.
Die Gerade RM liegt nicht in der Ebene E_2 und besitzt daher nur den einen Schnittpunkt M mit der Ebene E_2. Da PB in der Ebene E_2 liegt, M aber keine Punkt von PB ist, schneiden sich RM und PB nicht. (RM und PB sind „windschief“.)

Die Annahme dass sich RM und PB in einem Punkt S schneiden, könnte man wie in 2a) durch einen Ansatz

$\overrightarrow{BS} = r\cdot\overrightarrow{BP}$ mit $r\in\mathbb{R}$ und $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BM} + t\cdot\overrightarrow{MR}$ mit $t\in\mathbb{R}$

mit anschließendem Vergleich der beiden Vektordarstellungen überprüfen.
Die drei Gleichungen, die dabei für r und t erfüllt sein müssten, führen zu einem Widerspruch, d.h. die Annahme der Existenz eines Schnittpunktes S ist damit falsch.

c) Die Geraden RQ und BM liegen zueinander parallel, und die Punkte R, B, M und Q legen damit eine Ebene E_3 fest.

($RQ \parallel BM$ denn $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}$ und $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}$)

Da die beiden Geraden RM und QB sind zueinander nicht parallel und liegen in dieser Ebene E_3, sie schneiden sich damit in einem Schnittpunkt T.

Berechnung von T :

$\overrightarrow{BT} = r\cdot\overrightarrow{BQ}$ mit $r \in R$ und $\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BM} + t\cdot\overrightarrow{MR}$ mit $t \in R$

$\overrightarrow{BT} = r\cdot\overrightarrow{BQ} = r\cdot(\vec{b} - \vec{a} + 0{,}5\cdot\vec{c}) = -r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot r\cdot\vec{c}$

$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{BM} + t\cdot\overrightarrow{MR} = 0{,}5\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot c + t\cdot(-0{,}5\cdot\vec{c} - \vec{a}) =$

$-t\cdot\vec{a} + 0{,}5\cdot\vec{b} + (0{,}5 - 0{,}5\cdot t)\cdot\vec{c}$

also $-r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot r\cdot\vec{c} = \overrightarrow{BS} = -t\cdot\vec{a} + 0{,}5\cdot\vec{b} + (0{,}5 - 0{,}5\cdot t)\cdot\vec{c}$

der Koeffizientenvergleich liefert damit die drei Gleichungen

(1) $-r = -t$ (2) $r = 0{,}5$ (3) $0{,}5\cdot r = 0{,}5 - 0{,}5\cdot t \Leftrightarrow$

aus (1) und (2) folgt $r = t = 0{,}5$

diese muss in (3) noch überprüft werden :

linke Seite von (3) $0{,}5\cdot r = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$ und

rechte Seite von (3) $0{,}5 - 0{,}5\cdot t = 0{,}5 - 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25$ (passt!)

Wegen $r = t = 0{,}5$ halbiert T die beiden Strecken [RM] und [QB].