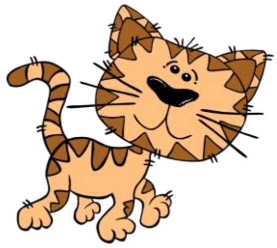
Q11 * Mathematik * Vermischte Aufgaben zur analytischen Geometrie

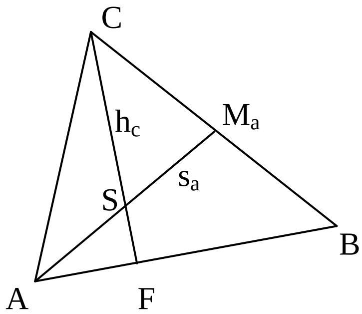


1. Gegeben sind die Punkte $A(5/0/2)$, $B(3/1/4)$ und $C(5/3/5)$ im R^3.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.
   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC.
   c) Bestimmen Sie einen Punkt S so, dass das Volumen der Pyramide ABCS das Volumen $V = 9$ besitzt.

2. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/-3)$, $B(3/5/3)$ und $C(9/7/0)$ im R^3.
   a) Zeigen Sie, dass sich das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen lässt. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und den Flächeninhalt dieses Quadrats.
   b) Zeigen Sie dass sich das Quadrat ABCD zu einem Würfel ABCDEFGH erweitern lässt. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte E, F, G und H und das Volumen dieses Würfels.

3. Gegeben sind die Punkte $A(-3/-2/4)$, $B(5/4/0)$ und $P(2/5/10)$ im R^3.
   a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, B und P nicht auf einer Geraden liegen.
   b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden AB.

4. Gegeben sind die Punkte $A(1/3/4)$, $B(4/6/1)$ und $C(-2/0/-5)$ im R^3.
   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ im Dreieck ABC.
   b) M_a ist die Seitenmitte der Seite a im Dreieck ABC. Bestimmen Sie die Koordinaten von M_a und die Länge der Seitenhalbierenden s_a im Dreieck ABC.
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunktes F der Höhe h_c im Dreieck ABC. In welchem Verhältnis teilt F die Strecke [AB]?
   d) Begründen Sie, dass $S(1/3/1)$ der Schnittpunkt von s_a und h_c ist.
   e) Wie hätte man die Koordinaten des Schnittpunktes von s_a und h_c rechnerisch ermitteln können?



5. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/0/4)$, $C(5/1/2)$ und $M(2/4/5)$ im R^3.
   a) Berechnen Sie die Größe der Winkel $\sphericalangle BAM$ und $\sphericalangle CAM$ und $\sphericalangle BAC$.
   b) Begründen Sie dass der Punkt M nicht in der durch A, B und C festgelegten Ebene E liegt. Welchen Abstand hat M von dieser Ebene E ?
   c) Die Kugel $k(M , r = 5)$ schneidet die Ebene E in einem Kreis mit dem Radius ϱ . Berechnen Sie die Größe von ϱ .

Q11 * Mathematik * Vermischte Aufgaben zur analytischen Geometrie * Lösungen

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$ und

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -4+2+2 = 0$ d.h. $\sphericalangle CBA = 90^o$ und $\overline{AB} = \overline{BC}$

b) $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$

c) $9 = V_{pyramide} = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC} \cdot h \;\Rightarrow\; h = \frac{9 \cdot 3}{F_{\Delta ABC}} = \frac{27}{4{,}5} = 6$

Suche ein $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

wegen $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3 = \frac{1}{2} \cdot h$ lautet ein geeignetes S z.B.

$\vec{S} = \vec{A} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ also $S(7/-4/6)$.

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7$ und

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 12+6-18 = 0$ d.h. $\sphericalangle CBA = 90^o$ und $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ also $D(7/4/-6)$ und $F_{\Delta ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 7 \cdot 7 = 49$

b) Suche ein $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -21 \\ 42 \\ -14 \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, wähle $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$,

wegen $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{9+36+4} = 7$ damit gilt $\vec{E} = \vec{A} + \vec{n}$, $\vec{F} = \vec{B} + \vec{n}$, $\vec{G} = \vec{C} + \vec{n}$, $\vec{H} = \vec{D} + \vec{n}$

also $E(4/-4/-1)$, $F(6/-1/5)$, $G(12/1/2)$ und $H(10/-2/-4)$.

3. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und ersichtlich $\overrightarrow{AP} \neq r \cdot \overrightarrow{AB}$,

also liegen A, B und P nicht auf einer Geraden.

b) Die Projektion $\vec{p} = \overrightarrow{AF}$ von $\overrightarrow{AP}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert den Fußpunkt F des Lotes von P auf AB.
Es gilt:

$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{40+42-24}{64+36+16} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{58}{116} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AF} = \vec{F} - \vec{A} \Rightarrow$

$\vec{F} = \overrightarrow{AF} + \vec{A} \Rightarrow F(1/1/2)$ und der gesuchte Abstand beträgt $d = \overline{FP} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$

4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-9\end{pmatrix}$; $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{-9-9+27}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{99}} = 0{,}174... \Rightarrow$

$\alpha = 79{,}975...^\circ \approx 80{,}0^\circ$

b) $\overrightarrow{M_a} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) \Rightarrow M_a(1/3/-2)$, $\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}$ und $s_a = \left|\overrightarrow{AM_a}\right| = \sqrt{0^2+0^2+6^2} = 6$

c) Die Projektion von $\overrightarrow{AF}$ von $\overrightarrow{AC}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert den Fußpunkt F; es gilt

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{-9-9+27}{9+9+9}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AF} = \vec{F}-\vec{A} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{AF} + \vec{A} \Rightarrow F(2/4/3) \text{ und } h_c = \left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{4^2+4^2+8^2} = 4\cdot\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}, \text{ also teilt F die Strecke [AB] im Verhältnis } \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{1}{2}.$$

d) Es muss für S(1/3/1) gelten: $\overrightarrow{AS} = r\cdot\overrightarrow{AM_a}$ (mit $0<r<1$) und $\overrightarrow{CS} = t\cdot\overrightarrow{CF}$ (mit $0<t<1$)

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}1-1\\3-3\\1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AM_a} \text{ und } \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix}2+2\\4-0\\3+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix}1+2\\3-0\\1+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CF}$$

e) Wir setzen an: $\overrightarrow{AS} = r\cdot\overrightarrow{AM_a}$ und $\overrightarrow{SF} = k\cdot\overrightarrow{CF}$ und $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SF} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow$

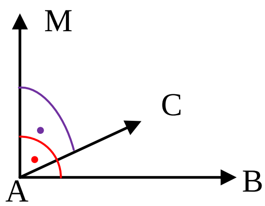
$$\overrightarrow{AF} = r\cdot\overrightarrow{AM_a} + k\cdot\overrightarrow{CF} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} (1)\quad 1 = 4k & \Rightarrow k = 0{,}25 \\ (2)\quad 1 = 4k & \\ (3)\quad -1 = -6r + 8k & \Rightarrow 6r = 2+1 \Rightarrow r = 0{,}5 \end{array}$$

$$\text{und damit } \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} \text{ also } \vec{S} = \vec{A} + \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \text{ also } S(1/3/1)$$

5. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AM} = 0$, $\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{AM} = 0$

also $\measuredangle BAM = 90^\circ$, $\measuredangle CAM = 90^\circ$ und $\measuredangle BAC \approx 66{,}9^\circ$

$\overrightarrow{AM}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ und M liegt damit nicht in der Ebene E.



b) Der gesuchte Abstand beträgt $d = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$

c) Für den Radius ρ des „Schnittkreises" gilt:

$\rho^2 + d^2 = r^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$