Q11 * Mathematik * Gebrochen rationale Funktionen * Aufgaben

1. Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Definitionslücken sowie für $x \to \pm\infty$.
   Skizzieren Sie den Graphen und prüfen Sie Ihre Skizze mit Hilfe eines Funktionsplotters.

   a) $f(x)=\dfrac{2-x}{0,2x^2-1}$ b) $g(x)=\dfrac{0,5x^2-2}{1-x}$ c) $h(x)= x-1+\dfrac{2x}{x^2+1}$

   d) $k(x)=\dfrac{x}{2x-4}-\dfrac{x^2+1}{x}$ e) $m(x)=\dfrac{2+x+0,5x^2}{x^2-4}$ f) $n(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^2}{2x-1}$

2. Geben Sie den Term einer (möglichst einfachen) gebrochen rationalen Funktion f an, die folgende Eigenschaften besitzt.

   a) Der Graph von f hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 2$ und für $x \to \pm\infty$ die Asymptote $y = 0,5$.

   b) Der Graph von f hat Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ und für $x \to \pm\infty$ die Asymptote $y = 0,5x - 1$.

   c) Der Graph von f hat eine Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -2$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat für $x \to \pm\infty$ die Asymptote $y = 0$.

   d) Der Graph von f hat eine Polstelle bei $x_1 = 0$ und ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Für $x \to \pm\infty$ hat der Graph die Asymptote $y = 0$ und bei $x_2 = 2$ befindet sich eine Nullstelle.

Weitere lehrreiche Aufgaben aus dem Buch:
S. 17 / Nr. 4, 7, 8
S. 18 / Nr. 10
S. 21 / Nr. 3, 4, 6

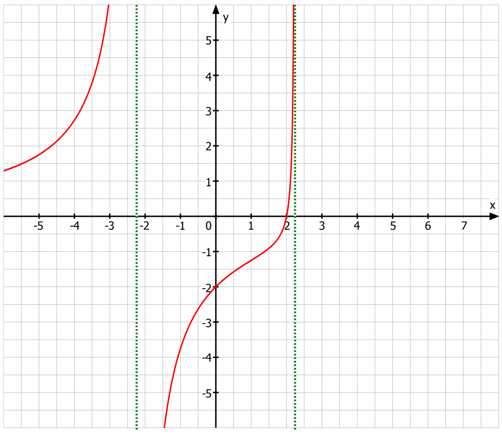
Q11 * Mathematik * Gebrochen rationale Funktionen * Lösungen

1\. a) $f(x)=\dfrac{2-x}{0,2x^2-1}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{5}\,,\sqrt{5}\}$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to+\sqrt{5}\\ <}} f(x) = \text{"}\,\frac{2-\sqrt{5}}{0^{\pm}}\,\text{"} = \mp\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to-\sqrt{5}\\ <}} f(x) = \text{"}\,\frac{2+\sqrt{5}}{0^{\mp}}\,\text{"} = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}{0,2-\frac{1}{x^2}} = \frac{0\pm 0}{0,2-0} = 0$$

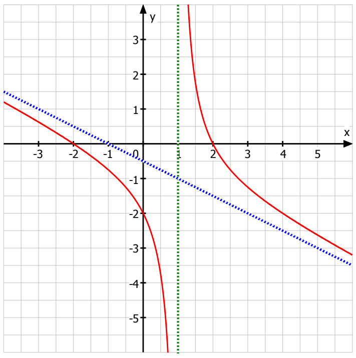


b) $g(x)=\dfrac{0,5x^2-2}{1-x}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1\\ <}} f(x) = \text{"}\,\frac{-1,5}{0^{\mp}}\,\text{"} = \pm\infty$$

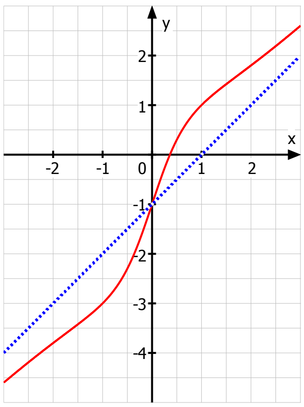
$$g(x)=\frac{0,5x^2-2}{1-x} = -0,5\,x-0,5+\frac{1,5}{x-1}$$

Asymptote $y=-0,5\,x-0,5$



c) $h(x)= x-1+\dfrac{2x}{x^2+1}$; $D=\mathbb{R}$

Asymptote $y = x-1$



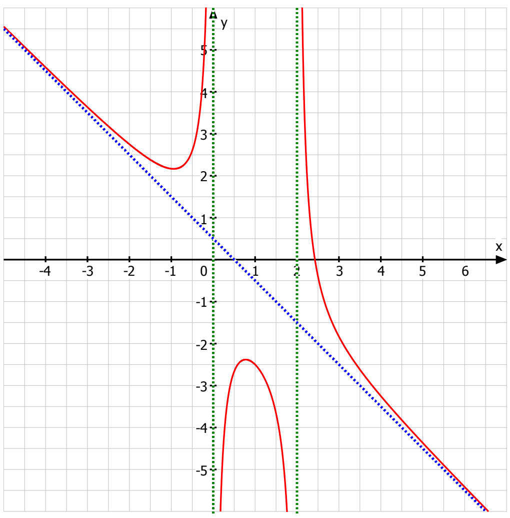
d) $k(x)=\dfrac{x}{2x-4}-\dfrac{x^2+1}{x}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{0\,;2\}$

$$k(x)=\frac{-2x^3+5x^2-2x+4}{2x\cdot(x-2)} = -x+0,5+\frac{2}{x\cdot(x-2)}$$

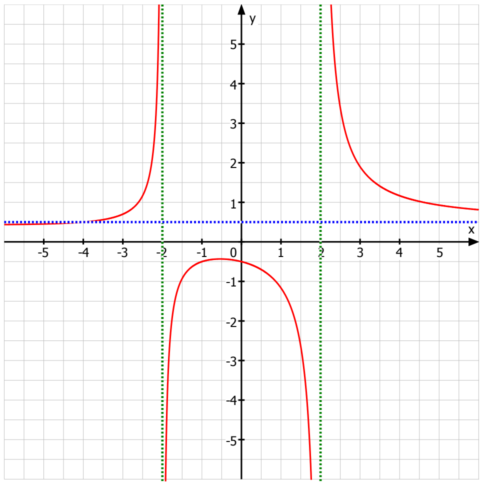
Asymptote $y=-x+0,5$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0\\ <}} k(x) = \text{"}\,\frac{4}{0^{\pm}\cdot(-2)}\,\text{"} = \mp\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 2\\ <}} k(x) = \text{"}\,\frac{-16+20-4+4}{8\cdot 0^{\pm}}\,\text{"} = \pm\infty$$



e) $m(x)=\dfrac{2+x+0,5x^2}{x^2-4}=\dfrac{2+x+0,5x^2}{(x-2)\cdot(x+2)}$; $D=R\setminus\{-2;\,2\}$



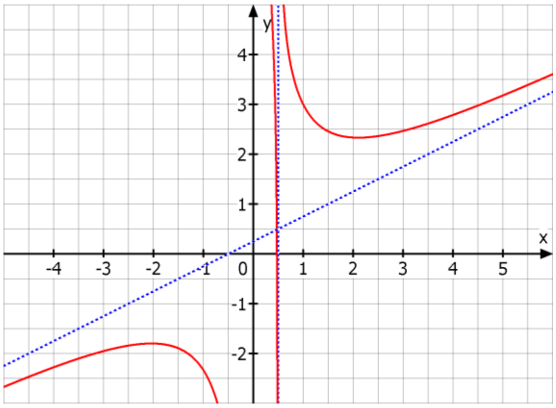
$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} m(x)="\dfrac{2-2+2}{(-4)\cdot 0^{\pm}}"=\mp\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} m(x)="\dfrac{2+2+2}{0^{\pm}\cdot 4}"=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} m(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+0,5}{1-\frac{4}{x^2}}=\dfrac{0\pm 0+0,5}{1-0}=0,5$

Asymptote $y=0,5$

f) $n(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^2}{2x-1}=\dfrac{x^3+4x-2}{x\cdot(2x-1)}$; $D=R\setminus\{0;\,0,5\}$



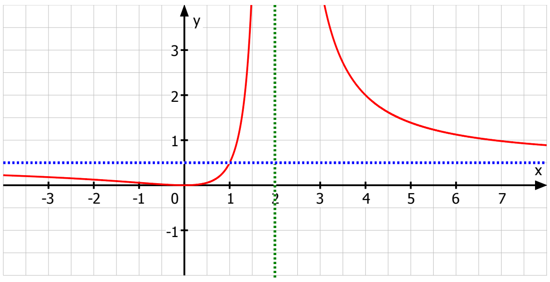
$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0} n(x)="\dfrac{0+0-2}{0^{\pm}\cdot(-1)}"=\pm\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 0,5} n(x)="\dfrac{0,125+2-2}{0,5\cdot 0^{\pm}}"=\pm\infty$

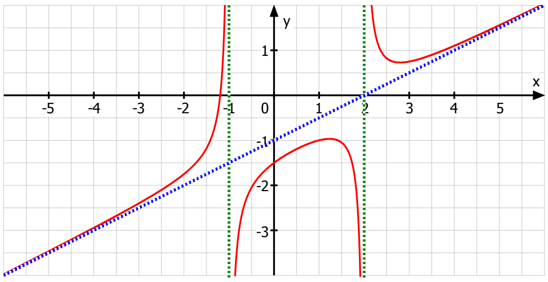
$n(x)=\dfrac{x^3+4x-2}{2x^2-x}=0,5x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{4,25x-2}{2x^2-2}$

Asymptote $y=0,5x$

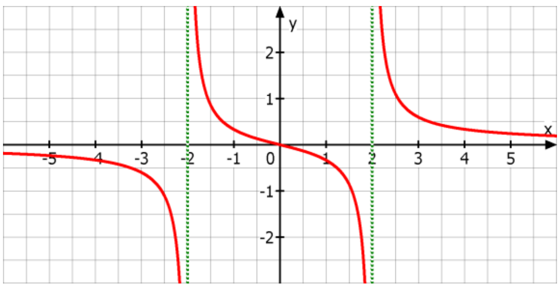
2. a) $f(x)=\dfrac{0,5x^2}{(x-2)^2}$



b) $f(x)=0,5x-1+\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}$



c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$



d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^4}$