Q11 * m3 * 1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 15.10.2014 * Gruppe A

1. Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3x^2 - x^3}{2x^2 - 2}$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

   b) Untersuchen Sie f an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Bestimmen Sie insbesondere die Gleichung der „schräg liegenden" Asymptote für $x \to \pm\infty$.

   c) Skizzieren Sie den Graph von f.

2. Gesucht ist eine ganz rationale Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

   Der Graph von f berührt bei $x_1 = -1$ die x-Achse und hat Pole bei $x_2 = 1$ und $x_3 = -2$.

   Für $x \to \pm\infty$ besitzt f die waagrechte Asymptote $y = -\dfrac{1}{2}$.

   Geben Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für f an.

Aufgabe	1a	b	c	2	Summe
Punkte	4	6	4	5	19

Gutes Gelingen! G.R.
Auch ohne Taschenrechner!

Q11 * m3 * 1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 15.10.2014 * Gruppe B

1. Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4x^2 - x^3}{2x^2 - 2}$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

   b) Untersuchen Sie f an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Bestimmen Sie insbesondere die Gleichung der „schräg liegenden" Asymptote für $x \to \pm\infty$.

   c) Skizzieren Sie den Graph von f.

2. Gesucht ist eine ganz rationale Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

   Der Graph von f berührt bei $x_1 = 1$ die x-Achse und hat Pole bei $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$.

   Für $x \to \pm\infty$ besitzt f die waagrechte Asymptote $y = -\dfrac{1}{3}$.

   Geben Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm für f an.

Aufgabe	1a	b	c	2	Summe
Punkte	4	6	4	5	19

Gutes Gelingen! G.R.
Auch ohne Taschenrechner!

Q11 * m3 * 1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 15.10.2014 * Gruppe A * Lösung

1. Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3x^2 - x^3}{2x^2 - 2}$.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x^3}{2x^2 - 2} = \dfrac{x^2 \cdot (3-x)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$

Nullstellen: $\quad f(x) = 0 \iff x^2 \cdot (3-x) = 0 \iff x_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle) ; $x_3 = 3$

b) $\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 1} \dfrac{x^2 \cdot (3-x)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \text{"}\dfrac{1 \cdot 2}{2 \cdot (\pm 0) \cdot 2}\text{"} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \dfrac{x^2 \cdot (3-x)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \text{"}\dfrac{1 \cdot 4}{2 \cdot (-2) \cdot (\pm 0)}\text{"} = \mp\infty$

$(-x^3 + 3x^2) : (2x^2 - 2) = -0{,}5x + 1{,}5 + \dfrac{-x+3}{2x^2 - 2}$

$-(-x^3 + x)$

$\quad 3x^2 - x$

$\quad -(3x^2 - 3)$

$\qquad -x + 3$

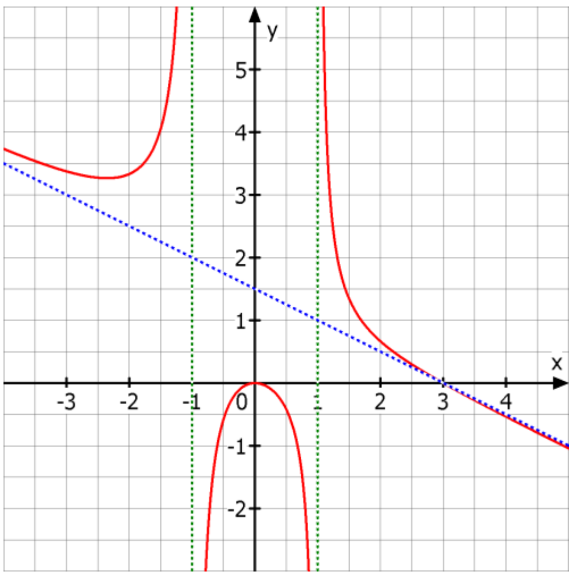
Schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$
lautet also $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

(Hinweis:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x+3}{2x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-1 + \frac{3}{x}}{2x - \frac{2}{x}} = \text{"}\dfrac{-1 \pm 0}{\pm\infty \mp 0}\text{"} = 0^{\mp}$,

daher nähert sich der Graph für $x \to +\infty$
„von unten“ an die schräg liegende Asymptote.)

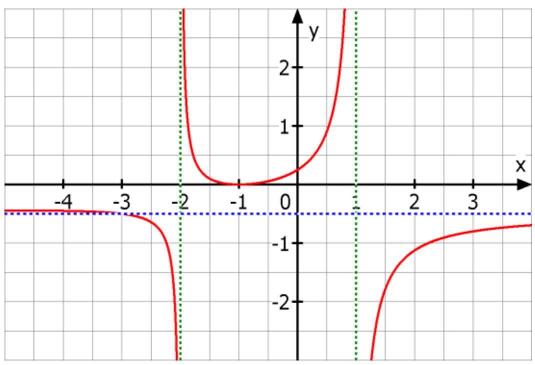
c)



2. Einfachste Lösung:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{-2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)}$

Der Graph hat dann folgendes Aussehen.



Q11 * m3 * 1. Stegreifaufgabe aus der Mathematik am 15.10.2014 * Gruppe B * Lösung

1. Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4x^2 - x^3}{2x^2 - 2}$.

a) $f(x) = \dfrac{4x^2 - x^3}{2x^2 - 2} = \dfrac{x^2 \cdot (4 - x)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \cdot (4 - x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = 0$ (doppelte Nullstelle) ; $x_3 = 4$

b) $\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 1} \dfrac{x^2 \cdot (4 - x)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \text{"}\dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot (\pm 0) \cdot 2}\text{"} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \dfrac{x^2 \cdot (4 - x)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \text{"}\dfrac{1 \cdot 5}{2 \cdot (-2) \cdot (\pm 0)}\text{"} = \mp\infty$

$$(-x^3 + 4x^2) : (2x^2 - 2) = -0{,}5x + 2 + \frac{-x+4}{2x^2 - 2}$$

$$-(-x^3 + x)$$

$$4x^2 - x$$

$$-(4x^2 - 4)$$

$$-x + 4$$

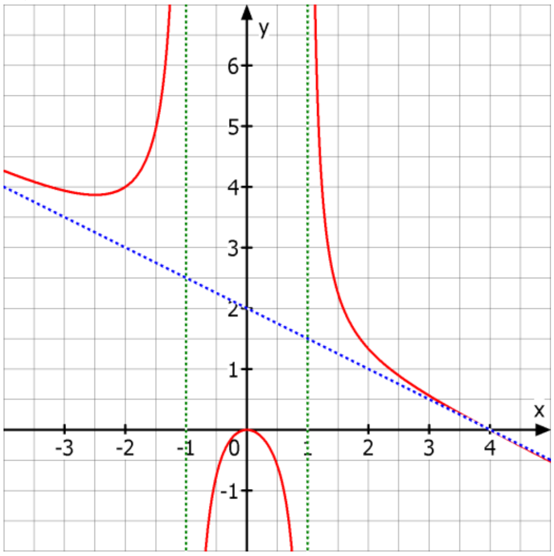
Schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$ lautet also $y = -0{,}5x + 2$.

(Hinweis:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x+4}{2x^2 - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1 + \frac{4}{x}}{2x - \frac{2}{x}} = \text{"}\frac{-1 \pm 0}{\pm\infty \mp 0}\text{"} = 0^{\mp} ,$$

daher nähert sich der Graph für $x \to +\infty$ „von unten" an die schräg liegende Asymptote.)

c)



2. Einfachste Lösung:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{-3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)}$$

Der Graph hat dann folgendes Aussehen.