Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 26.11.2012 * Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 - 0{,}3 \cdot x^2$.
   Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung von f an der Stelle $x_o = 2$.

2. Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 3}$.

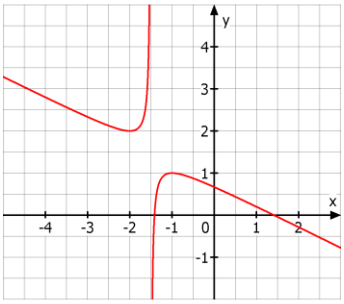
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an der Definitionslücke.

   b) Begründen Sie, dass der Graph von f eine schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$ besitzt und bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

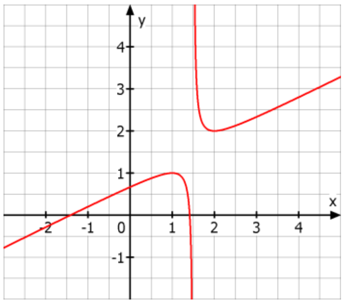
   c) Prüfen Sie, ob der Graph von f Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte besitzt und bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

   d) Handelt es sich bei einem der drei abgebildeten Graphen um den Graphen von f? Begründen Sie Ihre Antwort für jeden Graphen möglichst kurz!

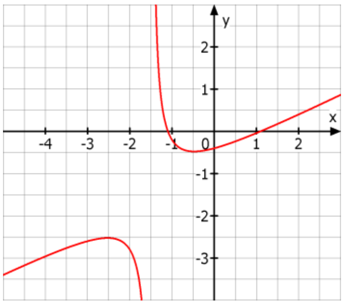
Graph 1



Graph 2



Graph 3



3. Bestimmen Sie alle Intervalle in denen die Funktion f mit
   $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ streng monoton steigt.

Aufgabe	1	2a	b	c	d	3	Summe
Punkte	5	3	4	8	3	6	29

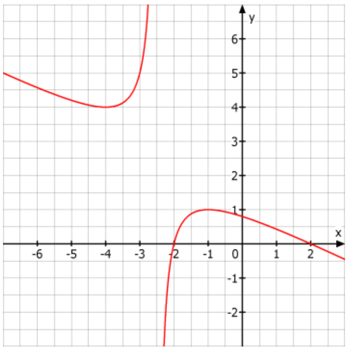
Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 26.11.2012 * Gruppe B

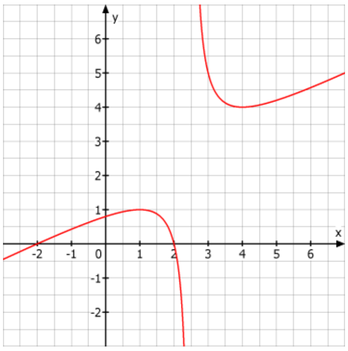
1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - 0,4 \cdot x^2$.
   Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung von f an der Stelle $x_o = 2$.

2. Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}$.
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an der Definitionslücke.
   b) Begründen Sie, dass der Graph von f eine schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$ besitzt und bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.
   c) Prüfen Sie, ob der Graph von f Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte besitzt und bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
   d) Handelt es sich bei einem der drei abgebildeten Graphen um den Graphen von f? Begründen Sie Ihre Antwort für jeden Graphen möglichst kurz!

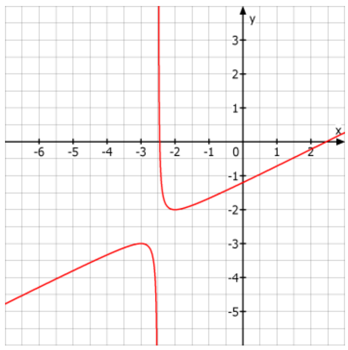
Graph 1



Graph 2



Graph 3



3. Bestimmen Sie alle Intervalle in denen die Funktion f mit
   $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ streng monoton steigt.

Aufgabe	1	2a	b	c	d	3	Summe
Punkte	5	3	4	8	3	6	29

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 26.11.2012 * Gruppe A * Lösung

1. $f(x) = 2 - 0{,}3 \cdot x^2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-0{,}3\cdot x^2 - (2-0{,}3\cdot 4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-0{,}3\cdot x^2 + 0{,}3\cdot 4}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-0{,}3\cdot(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-0{,}3\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} -0{,}3\cdot(x+2) = -0{,}3\cdot 4 = -1{,}2$$

2. a) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{2x+3}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{3}{2}\}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1{,}5} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -1{,}5} \dfrac{x^2-2}{2x+3} = \text{"}\dfrac{0{,}25}{\pm 0}\text{"} = \pm\infty$

b) G_f hat eine schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$, denn der Grad des Zählerpolynoms ist genau um 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms.

$$\begin{array}{l} (x^2-2) \;:\; (2x+3) = \color{red}{0{,}5x - 0{,}75} + \dfrac{0{,}25}{2x+3} \\ \underline{-(x^2+1{,}5x)} \\ \quad -1{,}5x-2 \\ \quad \underline{-(-1{,}5x-2{,}25)} \\ \qquad\quad 0{,}25 \end{array}$$

Die Funktionsgleichung der schräg liegenden Asymptote lautet also
$y = g(x) = 0{,}5x - 0{,}75$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{2x+3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x+3)\cdot 2x - (x^2-2)\cdot 2}{(2x+3)^2} = \dfrac{4x^2+6x-2x^2+4}{(2x+3)^2} =$

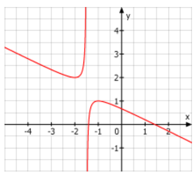
$$\frac{2x^2+6x+4}{(2x+3)^2} = \frac{2(x^2+3x+2)}{(2x+3)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+3x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2\ ;\ x_2 = -1$

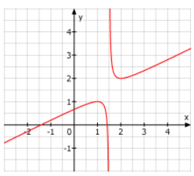
x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1\ (x\neq -1{,}5)$	$x=-1$	$-1<x$
$f'(x)$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0

HOP $(-2\ /\ \dfrac{4-2}{-4+3}) = (-2\ /\ -2)$ und TIP $(-1\ /\ \dfrac{1-2}{-2+3}) = (-1/-1)$ (und kein TP)

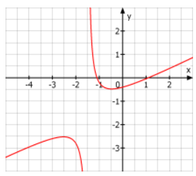
d) Graph 1 passt nicht, da die schräg liegende Asymptote hier z.B. negative Steigung hat.
Graph 2 passt nicht, denn senkrechte Asymptote liegt hier bei x = +1,5.
Graph 3 passt nicht, denn z.B. stimmen die Koordinaten von HOP und TIP nicht (oder Nullstellen falsch).



Graph 1



Graph 2



Graph 3

3. $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left[\sqrt{x^2+1}\cdot 2 - (2x-1)\cdot\dfrac{1\cdot 2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right]\cdot\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} =$

$$\frac{(x^2+1)\cdot 2 - (2x-1)\cdot x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+2-2x^2+x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{2+x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2+x > 0 \Leftrightarrow x > -2$

f ist also im Intervall $[-2\,;\infty[$ streng monoton steigend.

Q11 * Mathematik m6 * Klausur am 26.11.2012 * Gruppe B * Lösung

1. $f(x) = 1 - 0{,}4 \cdot x^2$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1 - 0{,}4 \cdot x^2 - (1 - 0{,}4 \cdot 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-0{,}4 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot 4}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-0{,}4 \cdot (x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-0{,}4 \cdot (x-2) \cdot (x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} -0{,}4 \cdot (x+2) = -0{,}4 \cdot 4 = -1{,}6$$

2. a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{5}{2}\}$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -2{,}5} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -2{,}5} \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5} = \text{"} \dfrac{2{,}25}{\pm 0} \text{"} = \pm \infty$

b) G_f hat eine schräg liegende Asymptote für $x \to \pm \infty$, denn der Grad des Zählerpolynoms ist genau um 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms.

$$(x^2 - 4) : (2x + 5) = 0{,}5x - 1{,}25 + \frac{2{,}25}{2x + 5}$$
$$\underline{-(x^2 + 2{,}5x)}$$
$$-2{,}5x - 4$$
$$\underline{-(-2{,}5x - 6{,}25)}$$
$$2{,}25$$

Die Funktionsgleichung der schräg liegenden Asymptote lautet also $y = g(x) = 0{,}5x - 1{,}25$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x + 5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \dfrac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x + 5)^2} =$

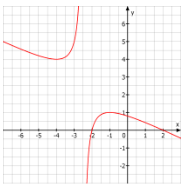
$$\frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2} = \frac{2(x^2 + 5x + 4)}{(2x + 5)^2}$$

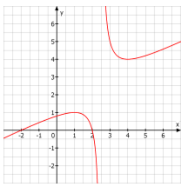
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x+4) \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$; $x_2 = -1$

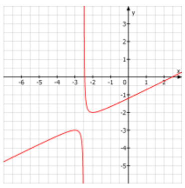
x	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < -1 \; (x \neq -2{,}5)$	$x = -1$	$-1 < x$
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0

HOP $\left(-4 \,/\, \dfrac{16 - 4}{-8 + 5} \right) = (-4 \,/\, -4)$ und TIP $\left(-1 \,/\, \dfrac{1 - 4}{-2 + 5} \right) = (-1 \,/\, -1)$ (und kein TP)

d) Graph 1 passt nicht, da die schräg liegende Asymptote hier z.B. negative Steigung hat.
Graph 2 passt nicht, denn senkrechte Asymptote liegt hier bei x = + 2,5.
Graph 3 passt nicht, denn z.B. stimmen die Koordinaten von HOP und TIP nicht (oder Nullstellen falsch).


Graph 1


Graph 2


Graph 3

3. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left[\sqrt{x^2 + 1} \cdot 3 - (3x - 1) \cdot \dfrac{1 \cdot 2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \right] \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} =$

$$\frac{(x^2 + 1) \cdot 3 - (3x - 1) \cdot x}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3x^2 + 3 - 3x^2 + x}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3 + x}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 + x > 0 \Leftrightarrow x > -3$

f ist also im Intervall $[-3 ; \infty[$ streng monoton steigend.