Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (3)

1. Berechnen Sie mit Hilfe bekannter Regeln die erste Ableitung von f.
   Vereinfachen Sie dann f´(x) soweit wie möglich.
   (Prüfen Sie vor dem Ableiten, ob sich f(x) nicht vereinfacht schreiben lässt!)

   a) $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \ln(x+1)$
   b) $f(x) = 0{,}5x \cdot (2x^2 + x)^3 - 0{,}5x \cdot (2x^2 + x)$
   c) $f(x) = \dfrac{2 \cdot \sin(3x)}{x^2}$
   d) $f(x) = (0{,}5x^2 - x) \cdot e^{2-0{,}5x} + \dfrac{e^2 \cdot x}{\sqrt{e^x}}$
   e) $f(x) = 2x \cdot \dfrac{5}{x^2+1}$
   f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$
   g) $f(x) = \dfrac{e^{0{,}5x} - e^{-0{,}5x}}{e^{0{,}5x} + e^{-0{,}5x}}$
   h) $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-1}$
   i) $f(x) = (x^2+1) \cdot \ln(1+x^2)$
   j) $f(x) = 0{,}25x^2 \cdot (2 \cdot \ln x - 1)$
   k) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
   l) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$

2. Bestimmen Sie alle Bereiche, in denen f streng monoton wächst!

   a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+5}$
   b) $f(x) = (0{,}5x^2 - 1) \cdot e^{1-0{,}5x}$
   c) $f(x) = \ln \dfrac{x}{4+x^2}$
   d) $f(x) = \dfrac{2 \cdot e^{0{,}5x}}{e^x + 3}$
   e) $f(x) = \dfrac{3e^{-x}}{e^{-x} + 3}$
   f) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+1}$

3. Bestimmen Sie den Wert des bestimmten Integrals.

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 - 2x \, dx$
   b) $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x-3)^3 \, dx$
   c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 0{,}5e^{0{,}5x-1} \, dx$
   d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 3 \cdot \sin(0{,}5(x+\pi)) \, dx$
   e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{5x}{x^2+2} \, dx$
   f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left| \frac{5x}{x^2+2} \right| dx$
   g) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{e^x}{0{,}5e^x + 1} \, dx$
   h) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$ (Hinweis: $F(x) = a \cdot \sqrt{x^2+5}$)

Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung (3) * Lösungen

1 a) $f(x) = (x^2 + 2x)\cdot\ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x+1)\cdot\ln(x+1) + \dfrac{x\cdot(x+2)}{x+1}$

b) $f(x) = 0{,}5x\cdot(2x^2 + x)^3 - 0{,}5x\cdot(2x^2 + x)$ (Ausklammern lohnt nicht!) $\Rightarrow$

$f'(x) = x\cdot(2x^2 + x)^2\cdot(7x+2) - 3x^2 - x = x\cdot(28x^5 + 36x^4 + 15x^3 + 2x^2 - 3x - 1)$

c) $f(x) = \dfrac{2\cdot\sin(3x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{6x\cos(3x) - 4\sin(3x)}{x^3}$

d) $f(x) = (0{,}5x^2 - x)\cdot e^{2-0{,}5x} + \dfrac{e^2\cdot x}{\sqrt{e^x}} = (0{,}5x^2 - x)\cdot e^{2-0{,}5x} + x\cdot e^{2-0{,}5x} = 0{,}5x^2\cdot e^{2-0{,}5x} \Rightarrow$

$f'(x) = x\cdot e^{2-0{,}5x} + 0{,}5x^2\cdot e^{2-0{,}5x}\cdot(-0{,}5) = (x - 0{,}25x^2)\cdot e^{2-0{,}5x} = 0{,}25x\cdot(4-x)\cdot e^{2-0{,}5x}$

e) $f(x) = 2x\cdot\dfrac{5}{x^2+1} = \dfrac{10x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{10\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\cdot(2+x-x^2)}{(x^2+2)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{(e^{0{,}5x} - e^{-0{,}5x})\cdot e^{0{,}5x}}{(e^{0{,}5x} + e^{-0{,}5x})\cdot e^{0{,}5x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{(x^2-1)}{x-1} - 2x\cdot\ln(x-1)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x+1-2x\cdot\ln(x-1)}{(x^2-1)^2}$

i) $f(x) = (x^2+1)\cdot\ln(1+x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x\cdot\ln(1+x^2) + \dfrac{(x^2+1)\cdot 2x}{1+x^2} = 2x\cdot\ln(1+x^2) + 2x$

j) $f(x) = 0{,}25x^2\cdot(2\cdot\ln x - 1) \Rightarrow f'(x) = 0{,}5x\cdot(2\cdot\ln x - 1) + \dfrac{0{,}5x^2}{x} = x\cdot\ln x$

k) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\left(2\cdot\sqrt{x^2+1} - (2x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} =$

$\dfrac{2\cdot(x^2+1) - (2x+1)\cdot x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2-x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

l) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\cdot(x^2+2) - (2x-1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{4+2x}{(x^2+2)^2}$

2\. a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x + 15}{(x^2+5)^2}$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}(1-\sqrt{46})\,;\ x_2 = \dfrac{1}{3}(1+\sqrt{46})$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]x_1; x_2[\ \Rightarrow$ f str.mon.stg. in $[\ \dfrac{1}{3}(1-\sqrt{46})\,;\ \dfrac{1}{3}(1+\sqrt{46})\,]$

b) $f(x) = (0{,}5x^2 - 1)\cdot e^{1-0{,}5x} \Rightarrow f'(x) = -0{,}25\cdot(x^2 - 4x - 2)\cdot e^{1-0{,}5x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2-\sqrt{6}\,;\ x_2 = 2+\sqrt{6}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]x_1; x_2[\ \Rightarrow$ f str.mon.stg. in $[\ 2-\sqrt{6}\,;\ 2+\sqrt{6}\ ]$

c) $f(x) = \ln \dfrac{x}{4+x^2}$; $D_f = R^+$ und $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{x\cdot(4+x^2)}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ und

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\,]0;\,2[$ also f streng monoton steigend in $]\,0;\,2]$

d) $f(x) = \dfrac{2\cdot e^{0,5x}}{e^x + 3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(e^x+3)\cdot e^{0,5x} - 2\cdot e^{0,5x}\cdot e^x}{(e^x+3)^2} = \dfrac{e^{0,5x}\cdot(3-e^x)}{(e^x+3)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$ und $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \ln 3$

f ist also streng monoton steigend im Intervall $]-\infty\,;\,\ln 3\,]$

e) $f(x) = \dfrac{3e^{-x}}{e^{-x}+3} = \dfrac{3e^{-x}\cdot e^x}{(e^{-x}+3)\cdot e^x} = \dfrac{3}{1+3e^x} = 3\cdot(1+3e^x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3\cdot 3e^x}{(1+3e^x)^2} = \dfrac{9e^x}{(1+3e^x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{9e^x}{(1+3e^x)^2} > 0$ für alle $x \in R \Rightarrow f$ ist in R streng monoton steigend

f) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\cdot(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2-\sqrt{5}$; $x_2 = 2+\sqrt{5}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\,]x_1;\,x_2[$ also f streng monoton steigend in $[2-\sqrt{5}\,;\,2+\sqrt{5}]$

3. a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 - 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - 4 - (-\frac{1}{3} - 1) = 0$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x-3)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot(2x-3)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{4}\cdot(-3)^4 = -20$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 0,5e^{0,5x-1}\,dx = \left[\,e^{0,5x-1}\right]_0^2 = e^0 - e^{-1} \approx 2,35$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 3\cdot\sin(0,5(x+\pi))\,dx = \left[-6\cos(0,5(x+\pi))\,\right]_0^{\pi} = -6\cos\pi + 6\cos\frac{\pi}{2} = 6 + 0 = 6$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{5x}{x^2+2}\,dx = 0$ wegen Punktsymmetrie von f zum Ursprung

f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left|\frac{5x}{x^2+2}\right| dx = 2\cdot\int_{0}^{2} \frac{5x}{x^2+2}\,dx = 2\cdot\left[\,2,5\cdot\ln\left|x^2+2\right|\right]_0^2 = 5\cdot\ln 6 - 5\cdot\ln 2 = 5\cdot\ln 3 \approx 5,5$

g) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{e^x}{0,5e^x+1}\,dx = \left[\,2\cdot\ln\left|(0,5e^x+1)\right|\right]_0^2 = 2\cdot\ln(0,5\cdot e^2+1) - 2\cdot\ln 1 = 2\cdot\ln(0,5\cdot e^2+1) \approx 3,1$

h) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$; $F(x) = a\cdot\sqrt{x^2+5}\,) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{a\cdot 2x}{2\cdot\sqrt{x^2+5}} = \dfrac{a\cdot x}{\sqrt{x^2+5}} = f(x)$ also $a = 5$

$\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx = \left[5\cdot\sqrt{x^2+5}\;\right]_0^2 = 5\cdot 3 - 5\cdot\sqrt{5} = 15 - 5\cdot\sqrt{5} \approx 3,8$