

Q12 * Mathematik m6 * Zufallsgrößen

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis ω eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsgröße**.
$$X : \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Mit der Zufallsgröße lassen sich folgendermaßen Ereignisse festlegen:

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $A = \{ \omega / X(\omega) = x \}$ ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit man kurz so schreibt: $P(A) = P(X=x)$.

Analog legt man fest: $P(X \leq x) = P(\{ \omega / X(\omega) \leq x \})$

Die Funktion $W : \mathbb{R} \ni x \mapsto W(x) = P(X=x) \in [0;1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (oder auch Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsgröße X .

Die Funktion $F : \mathbb{R} \ni x \mapsto F(x) = P(X \leq x) \in [0;1]$ heißt **kumulative Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X .

W wird meist als „Stabdiagramm“ oder als „**Histogramm**“ dargestellt.

F ist eine monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$



Aufgaben:

1. Zufallsexperiment: Wurf zweier Laplace-Würfel

Zufallsgröße: $X =$ „Augensumme“

- Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X tabellarisch an und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm und ein Histogramm.
- Geben Sie die Werte von $P(X=3)$, $P(X=0,5)$, $P(3 < x < 6)$, $W(4)$ und $F(4)$ an.
- Geben Sie in Kurzschreibweise an $P(\text{„Die Augensumme beträgt mindestens 9“})$ und bestimmen Sie den zugehörigen Wert.
- Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

2. Anton und Berta spielen folgendes Spiel: Anton wirft zwei Würfel.

Er bekommt von Berta den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen in Euro.

Allerdings muss er Berta für jeden Wurf 2 Euro als Einsatz zahlen.

Die Zufallsgröße G ordnet jedem Ergebnis den Reingewinn Antons in Euro zu.

- Erstellen Sie für G die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabellenform und zeichnen Sie ein Stabdiagramm.
- Lohnt sich für Anton das Spiel?
Mit welchem Gewinn oder Verlust hat Anton im Mittel zu rechnen?

3. Anton und Berta spielen folgendes Spiel: Berta wirft eine Münze 5-mal.

Sie erhält von Anton die maximale Anzahl unmittelbar hintereinander geworfener Wappen in Euro. Auch Berta muss pro Spiel einen Einsatz von 2 Euro zahlen.

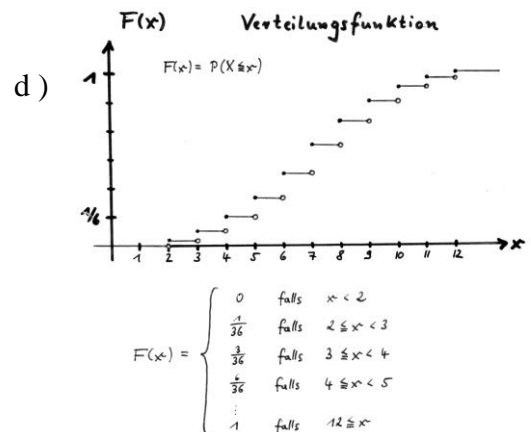
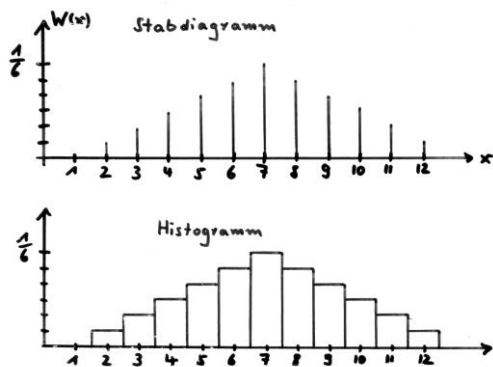
Die Zufallsgröße G ordnet jedem Ergebnis den Reingewinn Bertas in Euro zu.

- Erstellen Sie für G die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Tabellenform und zeichnen Sie ein Stabdiagramm.
- Lohnt sich für Berta das Spiel?
Mit welchem Gewinn oder Verlust hat Berta im Mittel zu rechnen?

Q12 * Mathematik m6 * Zufallsgrößen * Lösungen

1. a)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



$$b) P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} ; P(X=0,5) = 0 ; P(3 < x < 6) = P(X=4) + P(X=5) = \frac{7}{36}$$

$$W(4) = P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} ; F(4) = P(X \leq 4) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$c) P(\text{„Die Augensumme beträgt mindestens 9“}) = P(X \geq 9) = \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

2. a)

x in €	-2	-1	0	1	2	3
P(G=x)	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

- b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{36}$ verliert Anton 2 €, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{10}{36}$ verliert Anton 1 €, usw.

Anton kann also durchschnittlich pro Spiel mit

$$\frac{6}{36} \cdot (-2\text{€}) + \frac{10}{36} \cdot (-1\text{€}) + \frac{8}{36} \cdot (0\text{€}) + \frac{6}{36} \cdot (1\text{€}) + \frac{4}{36} \cdot (2\text{€}) + \frac{2}{36} \cdot (3\text{€}) = -\frac{2}{36} \text{€}$$

keinem Gewinn sondern mit einem Verlust von $\frac{2}{36}$ € rechnen.



3. a)

x in €	3	2	1	0	-1	-2
P(G=x)	1/32	2/32	5/32	11/32	12/32	1/32

- b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{32}$ gewinnt Berta 3 €, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{32}$ gewinnt Berta 2 €, usw.

Bertas Gewinnerwartung pro Spiel beträgt also durchschnittlich

$$\frac{1}{32} \cdot (3\text{€}) + \frac{2}{32} \cdot (2\text{€}) + \frac{5}{32} \cdot (1\text{€}) + \frac{11}{32} \cdot (0\text{€}) + \frac{12}{32} \cdot (-1\text{€}) + \frac{1}{32} \cdot (-2\text{€}) = -\frac{2}{32} \text{€}$$

Auch Berta muss also mit einem durchschnittlichen Verlust von $\frac{2}{32}$ € pro Spiel rechnen.