Q12 * Mathematik m1 * Nachtermin zur Kurzarbeit vom 11.04.2018

Gegeben sind die beiden Ebenen

$E_1: \; 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4 = 0$ und $E_2: \; x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2 = 0$

und die Punkte $P_t(5/1/t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen E_1 und E_2?

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

$$[\text{Mögliches Ergebnis}: \; g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \;]$$

c) Eine Gerade h soll in E_1 liegen und g senkrecht schneiden.
Bestimmen Sie eine mögliche Gleichung von h.

d) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $P_t(5/1/t)$ von den beiden Ebenen E_1 und E_2 den gleichen Abstand hat.

e) Eine Kugel $k(M; r)$ mit Radius $r = 5$ soll beide Ebenen E_1 und E_2 berühren.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines geeigneten Mittelpunktes M.

f) Ein für die Aufgabe d) geeigneter Mittelpunkt lautet $M(5/1/-5)$.
Peter behauptet:
Es gibt unendlich viele Mittelpunkte zur Aufgabe d), die zusätzlich alle auf einer Geraden liegen.
Stimmt Peters Behauptung? Geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung der Geraden an.

Aufgabe	1a	b	c	d	e	f	Summe
Punkte	3	4	4	4	4	3	22

Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Mathematik m1 * Nachtermin zur Kurzarbeit vom 11.04.2018 * Lösung

a) $E_1:\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4 = 0$ und $E_2:\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2 = 0$

Schnittwinkel φ: $\cos\varphi = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{2-2+4}{3\cdot 3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \varphi = 63{,}61...^{\circ} \approx 63{,}6^{\circ}$

b) $x_1 = -2x_2 + 2x_3 + 2$ aus E_1 in E_2 eingesetzt: $-4x_2 + 4x_3 + 4 - x_2 - 2x_3 - 4 = 0 \Rightarrow$
$-5x_2 + 2x_3 = 0$ Wähle nun z.B. $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 2 = 2$ also $P_1(2/0/0) \in g$
wähle $x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 2$ und $x_1 = -2\cdot 2 + 2\cdot 5 + 2 = 8$ also $P_2(8/2/5) \in g$

$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}8-2\\2-0\\5-0\end{pmatrix}$ also $g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix}$

c) Für den Richtungsvektor $\vec{v}$ von h muss gelten: $\vec{v} \perp n_{E_1}$ und $\vec{v} \perp$ Richtungsvektor von g

also geeignet $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5+4\\-12-10\\4+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-22\\10\end{pmatrix}$ also $h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-22\\10\end{pmatrix}$

d) $E_{1,HNF}:\ \frac{1}{3}\cdot(2x_1 - x_2 - 2x_3 - 4) = 0$ und $E_{2,HNF}:\ \frac{1}{3}\cdot(x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2) = 0$

$d(P_t;E_1) = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot 5 - 1\cdot 1 - 2\cdot t - 4) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot t$; $d(P_t;E_2) = \frac{1}{3}\cdot(1\cdot 5 + 2\cdot 1 - 2\cdot t - 2) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot t$

also $d(P_t;E_1) = d(P_t;E_2) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot t$ für alle $t \in R$

e) Nach d) ist für M ein P_t mit $d(P_t;E_1) = r = 5$ geeignet.

Also $\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\cdot t = 5 \Rightarrow 5 - 2t = 15 \Rightarrow t = -5$ und $M = P_{-5} = (5/1/-5)$

f) Peters Behauptung stimmt. Ist h die Parallele zur Schnittgeraden g durch den Punkt M, so haben alle Punkte dieser Geraden h von den beiden Ebenen den gleichen Abstand $d = 5$.

Die Gerade lautet also $h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\1\\-5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix}$