Spezielle Relativitätstheorie * Projekttage am EMG * Lösungen zu den Aufgaben

3. Minkowski-Diagramme

Geradengleichungen:

(1) $x = 3\,\text{Ls} = 3\,c\cdot s$

(2) $x = 1\,c\cdot t$

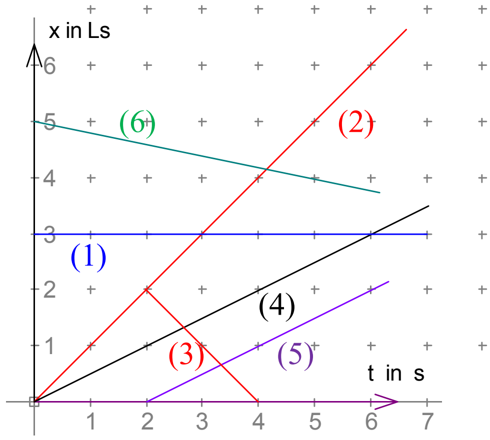
(3) $x = 4c\cdot s - 1\,c\cdot t \quad (\text{für } 2s \le t \le 4s)$

(4) $x = 0{,}5\,c\cdot t$

(5) $x = 0{,}5\,c\cdot t - 1c\cdot s$

(6) $x = 5\,c\cdot s - 0{,}2\,c\cdot t$

(2) und (3) gehören zu Lichtsignalen.



4. Geschwindigkeitsradar

Zu zeigen:

$$\Delta\tau = \frac{c+v}{c-v}\cdot\Delta t \quad \text{und} \quad v = \frac{\Delta\tau-\Delta t}{\Delta\tau+\Delta t}\cdot c$$

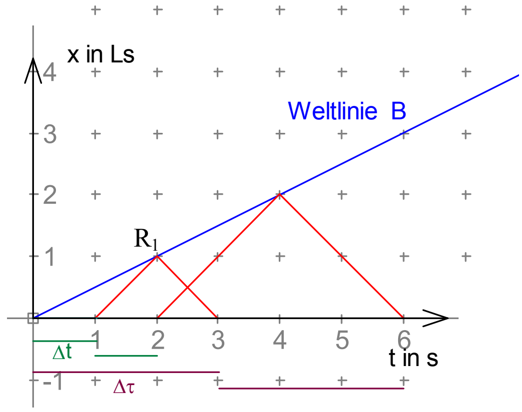
Weltlinie B: $x = v\cdot t$

erstes Lichtsignal: $x = 1\,c\cdot t - 1\,c\cdot\Delta t$

erste Reflexion (Ereignis R_1 zum Zeitpunkt t_1) :

$v\cdot t_1 = 1\,c\cdot t_1 - 1\,c\cdot\Delta t \;\Rightarrow$

$$c\cdot\Delta t = t_1\cdot(c-v) \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{c\cdot\Delta t}{c-v}$$



Rückkehr des Signals zum Zeitpunkt $t_2 = \Delta\tau$:

$$\Delta\tau = \Delta t + 2\cdot(t_1-\Delta t) = 2\cdot t_1 - \Delta t = \frac{2\cdot c\cdot\Delta t}{c-v} - \Delta t = \frac{2\cdot c\cdot\Delta t-(c-v)\cdot\Delta t}{c-v} = \frac{(c+v)\cdot\Delta t}{c-v}$$

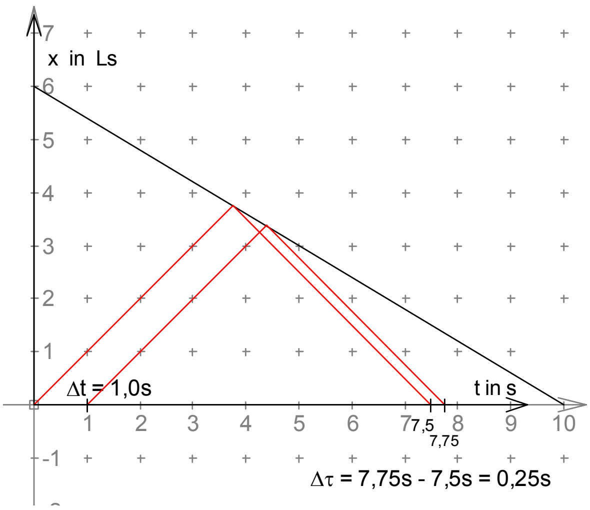
$$\text{also } \Delta\tau\cdot(c-v) = (c+v)\cdot\Delta t \;\Rightarrow\; c\cdot\Delta\tau - c\cdot\Delta t = \Delta\tau\cdot v + v\cdot\Delta t \;\Rightarrow\; v = c\cdot\frac{\Delta\tau-\Delta t}{\Delta\tau+\Delta t}$$

Aufgabe:

Für $\Delta t = 1{,}0s$ gilt $\Delta\tau = 0{,}25s$, d.h.

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{0{,}25}{1{,}0} = \frac{1}{4} \quad \text{und für } v=-06c$$

$$\frac{c+v}{c-v} = \frac{c-0{,}6c}{c-(-0{,}6c)} = \frac{0{,}4}{1{,}6} = \frac{1}{4}$$



5. Der k-Faktor

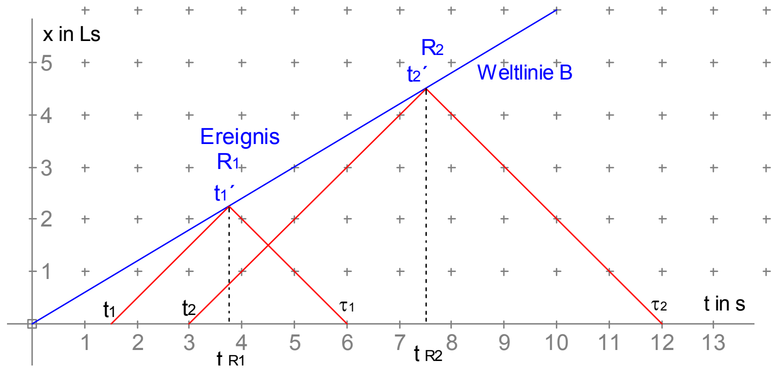
$\Delta t' = k \cdot \Delta t$ und
$\Delta t = t_1$ und $\Delta t' = t_1'$
und $\tau_1 = k \cdot t_1' \Rightarrow$
$\tau_1 = k \cdot t_1' = k \cdot k \cdot t_1$ d.h.

$$\frac{\tau_1}{t_1} = k^2$$

Nach Kapitel 4. gilt

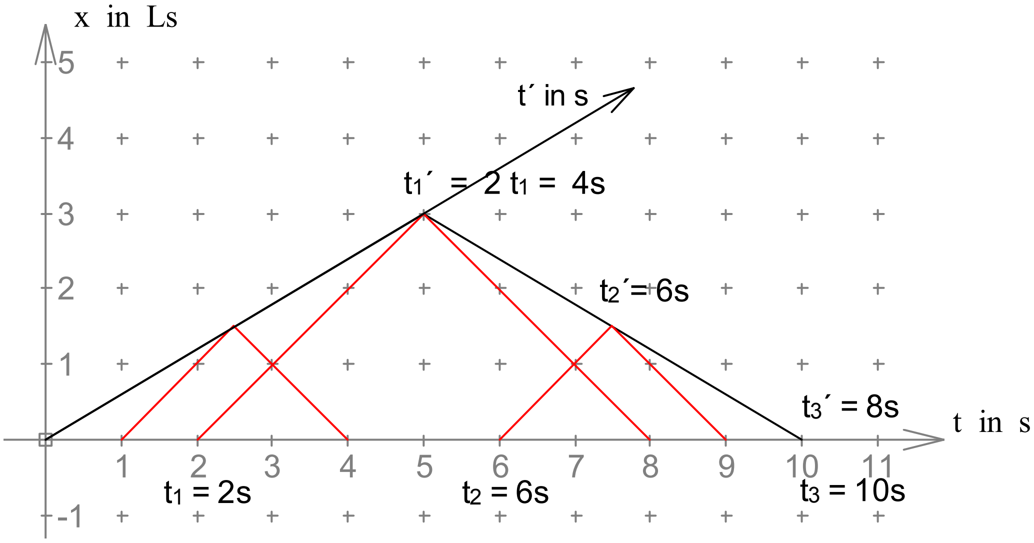
$$\frac{\tau_1}{t_1} = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{c+v}{c-v} \quad \text{also}$$

$$k^2 = \frac{c+v}{c-v} \quad \text{also} \quad k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$



6. Skalierung der t´-Achse und das Zwillingsparadoxon

Für $v = 0{,}6c$ gilt $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \sqrt{\frac{1{,}6}{0{,}4}} = 2$



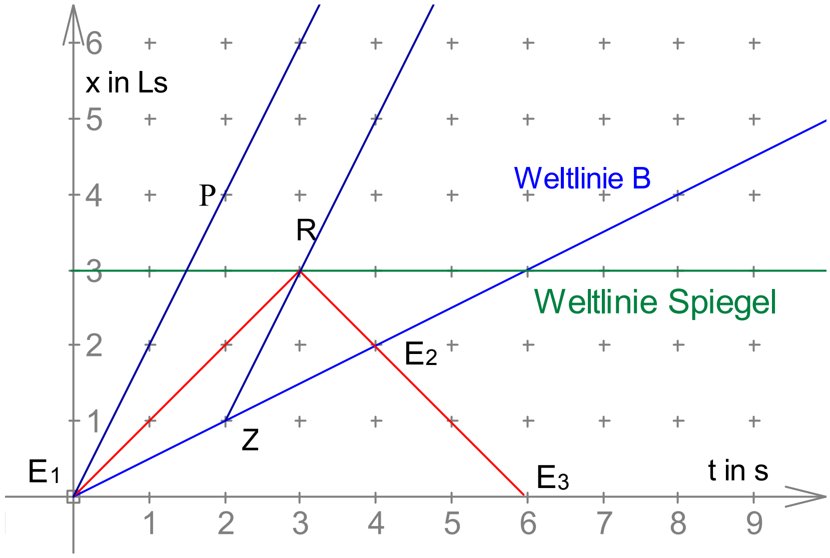
$t_1' = k \cdot t_1 = 2 \cdot 2s = 4s$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 6s - 2s = 4s$ und $\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{1}{k}\Delta t = \frac{4s}{2} = 2s$ also $t_2' = 4s + 2s = 6s$

$t_3' = t_2' + (t_2' - t_1') = 6s + 2s = 8s$

A und B treffen sich also nach der Zeitrechnung von A nach 10s, nach der Zeitrechnung von B aber schon nach 8s.

7. Das t´- x´- Koordinatensystem und die Relativität der Gleichzeitigkeit

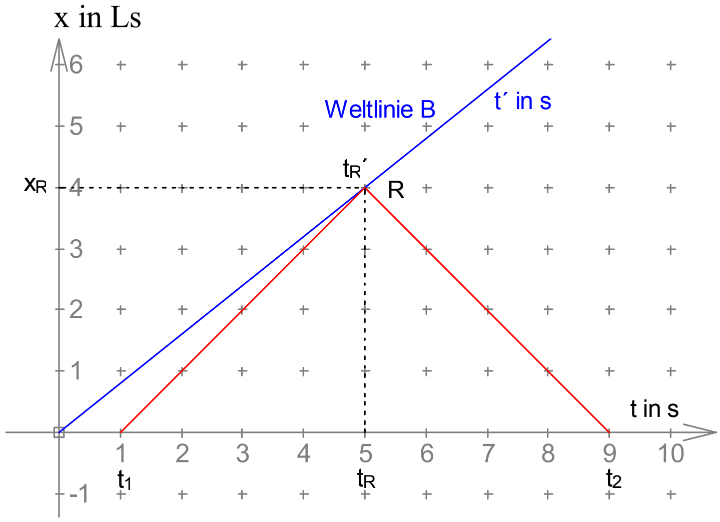


a) Die Reflexion des Lichtsignals (Ereignis R) findet für B genau zwischen den beiden Ereignissen E_1 und E_2 statt. Also finden R und Z für B zum gleichen Zeitpunkt statt. Für A dagegen findet R um genau eine Sekunde später als Z statt.

b) Auf der Geraden RZ liegen alle Ereignisse, die für B gleichzeitig mit R und Z stattfinden. Auf der x´-Achse von B liegen alle Ereignisse, die für B gleichzeitig (zum Zeitpunkt 0s) stattfinden. Die x´-Achse liegt daher parallel zur Geraden RZ.

c) Das Dreieck E_1E_2R ist bei R rechtwinklig (Lichtstrahlen!), d.h. R liegt auf dem Thaleskreis über E_1E_2 mit dem Mittelpunkt Z.
Daher gilt: $\alpha = \sphericalangle ZE_1R = \sphericalangle E_1RZ$ und $\sphericalangle E_2ZR = 2\alpha$
Da die x´-Achse E_1P parallel zu ZR liegt gilt daher
$\sphericalangle ZE_1P = 2\alpha = \sphericalangle ZE_1R + \sphericalangle RE_2P = \alpha + \sphericalangle RE_2P$ also $\sphericalangle RE_2P = \alpha = \sphericalangle ZE_1R$

8. Zeitdilatation und Längenkontraktion



a) Zeitdilatation (Zeitdehnung)

$t_R' = k \cdot t_1$ und $t_2 = k \cdot t_R' = k \cdot k \cdot t_1 = k^2 \cdot t_1$

$t_R = \frac{1}{2} \cdot (t_1 + t_2) = \frac{1}{2} \cdot (t_1 + k^2 t_1) = \frac{1}{2} \cdot (1 + k^2) \cdot t_1$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{t_R'}{t_R} = \frac{k \cdot t_1}{0{,}5 \cdot (1+k^2) \cdot t_1} = \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{1+\frac{c+v}{c-v}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot (c-v)}{(c-v)+(c+v)} =$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{(c+v)\cdot(c-v)^2}{c-v}}}{2c} = \frac{\sqrt{(c+v)\cdot(c-v)}}{c} = \sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-ß^2}$$

b) Längenkontraktion

$x_R' = v \cdot t_R' = v \cdot k \cdot t_1$ und $x_R = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (k^2 - 1) \cdot t_1$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x_R'}{x_R} = \frac{v \cdot k \cdot t_1}{0{,}5 \cdot c(k^2-1) \cdot t_1} = \frac{2 \cdot v \cdot k}{c \cdot (k^2-1)} = \frac{2v}{c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{\frac{c+v}{c-v} - \frac{c-v}{c-v}} = \frac{2v}{c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{\frac{2v}{c-v}} =$$

$$\frac{2v}{c} \cdot \frac{\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot (c-v)}{2v} = \frac{\sqrt{\frac{(c+v)\cdot(c-v)^2}{c-v}}}{c} = \frac{\sqrt{(c+v)\cdot(c-v)}}{c} = \sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2}} =$$

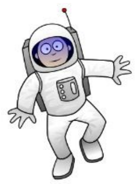
$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-ß^2}$$

Aufgabe:

a) Die Wegstrecke von 10 Lj ist für den mit v reisenden Astronaut Pirx verkürzt.

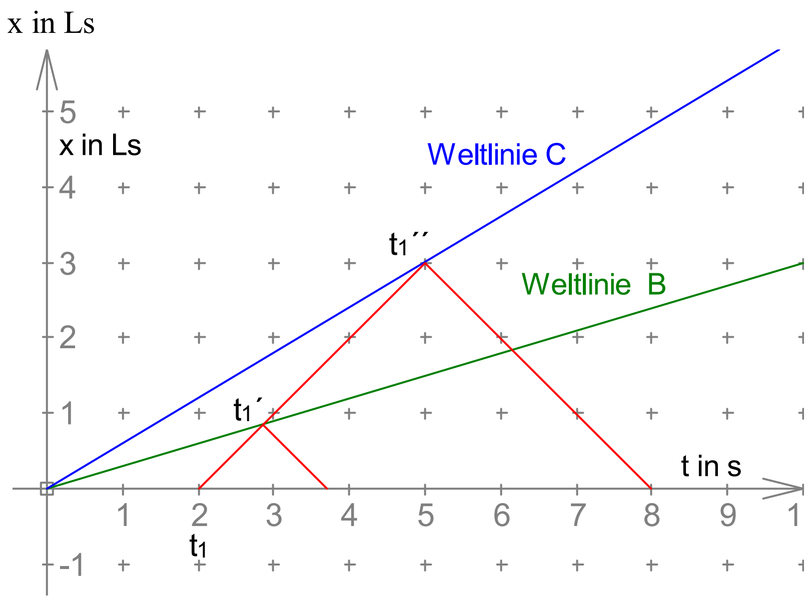
Also gilt: $10\,\text{Lj} \cdot \sqrt{1-ß^2} = v \cdot 2\,\text{Jahre} \Leftrightarrow 10c \cdot \sqrt{1-ß^2} = 2v \Leftrightarrow 5 \cdot \sqrt{1-ß^2} = ß \Leftrightarrow$

$25 \cdot (1-ß^2) = ß^2 \Leftrightarrow 25 = 26ß^2 \Leftrightarrow \frac{v}{c} = ß = \sqrt{\frac{25}{26}} = 0{,}98058...$ also $v \approx 0{,}98c$



b) Der „Tacho“ von Pirx zeigt $10\,\text{Lj} \cdot \sqrt{1-ß^2} = 10\,\text{Lj} \cdot \sqrt{1-(0{,}980...)^2} \approx 0{,}275\,\text{Lj}$ an.

9. Einsteinaddition von Geschwindigkeiten



$$t_1' = k_1 \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_1'' = k_2 \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_1'' = k \cdot t_1' = k \cdot k_1 \cdot t_1 \;\Rightarrow\; k_2 \cdot t_1 = k \cdot k_1 \cdot t_1 \;\text{also}\; k = \frac{k_2}{k_1}$$

$$k = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \;\Rightarrow\; k^2 = \frac{c+u}{c-u} \;\Rightarrow\; k^2c - k^2u = c+u \;\Rightarrow\; k^2c - c = u + k^2u \;\Rightarrow$$

$$c(k^2-1) = u(1+k^2) \;\Rightarrow\; u = \frac{k^2-1}{k^2+1} \cdot c \quad (*)$$

$$k^2 = \frac{k_2{}^2}{k_1{}^2} = \frac{\dfrac{c+v_2}{c-v_2}}{\dfrac{c+v_1}{c-v_1}} = \frac{(c+v_2)\cdot(c-v_1)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)} \quad \text{eingesetzt in } (*)$$

$$u = \frac{\dfrac{(c+v_2)\cdot(c-v_1)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)} - 1}{\dfrac{(c+v_2)\cdot(c-v_1)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)} + 1} \cdot c = \frac{\dfrac{(c+v_2)\cdot(c-v_1)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)} - \dfrac{(c+v_1)\cdot(c-v_2)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)}}{\dfrac{(c+v_2)\cdot(c-v_1)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)} + \dfrac{(c+v_1)\cdot(c-v_2)}{(c+v_1)\cdot(c-v_2)}} \cdot c =$$

$$\frac{(c+v_2)\cdot(c-v_1)-(c+v_1)\cdot(c-v_2)}{(c+v_2)\cdot(c-v_1)+(c+v_1)\cdot(c-v_2)} \cdot c = \frac{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2v_1 - (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1v_2)}{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2v_1 + (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1v_2)} \cdot c =$$

$$\frac{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2v_1 - (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1v_2)}{c^2 - cv_1 + cv_2 - v_2v_1 + (c^2 - cv_2 + cv_1 - v_1v_2)} \cdot c = \frac{2cv_2 - 2cv_1}{2c^2 - 2v_1v_2} \cdot c = \frac{c^2 \cdot (v_2 - v_1)}{c^2 - v_1v_2} =$$

$$\frac{v_2 - v_1}{1 - \dfrac{v_1v_2}{c^2}} \quad \text{also} \quad u = \frac{v_2 - v_1}{1 - \dfrac{v_1v_2}{c^2}} \;\Rightarrow\; u - \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot u}{c^2} = v_2 - v_1 \;\Rightarrow\; u + v_1 = v_2 + \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot u}{c^2} \;\Rightarrow$$

$$u + v_1 = v_2 \cdot \left(1 + \frac{v_1 \cdot u}{c^2}\right) \;\Rightarrow\; v_2 = \frac{u + v_1}{1 + \dfrac{v_1 \cdot u}{c^2}}$$

Aufgaben zum Kapitel 9

1. C bewegt sich relativ zu A mit $v = v_1 \oplus v_2 = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} =$

$$\frac{0,5c + 0,8c}{1 + 0,5 \cdot 0,8} = \frac{1,3c}{1,4} = 0,9285...c \approx 0,93c\ .$$

2. C bewegt sich relativ zu A mit $v = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$ wobei $v_1 = 0,8c$ und $v_2 = -\,0,5c$ gilt.

Also $v = \dfrac{0,8c - 0,5c}{1 - 0,8 \cdot 0,5} = \dfrac{0,3c}{0,6} = 0,50c$

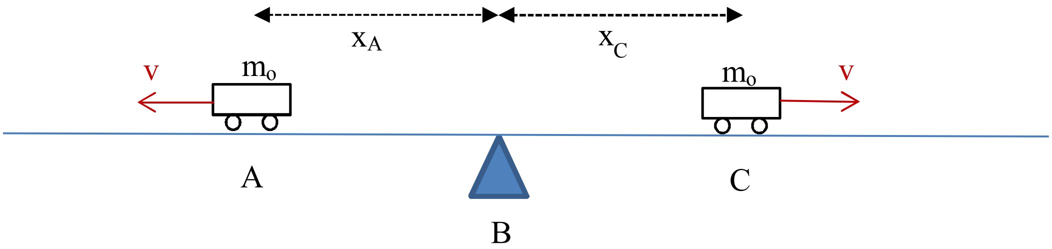
3. In Vorwärtsrichtung: $v_v = \dfrac{v_1 + c}{1 + \dfrac{v_1 \cdot c}{c^2}} = \dfrac{0,6c + c}{1 + 0,6 \cdot 1} = \dfrac{1,6c}{1,6} = c$

In Rückwärtsrichtung: $v_R = \dfrac{v_1 - c}{1 - \dfrac{v_1 \cdot c}{c^2}} = \dfrac{0,6c - c}{1 - 0,6 \cdot 1} = \dfrac{-0,4c}{0,4} = -\,c$

4. Die Rakete schlägt mit der Geschwindigkeit u ein: $u = \dfrac{0,6c - 0,95c}{1 - 0,6 \cdot 0,95} = \dfrac{-\,0,35c}{0,43}$

$$= -\frac{35}{43}c = 0,813...c \approx 0,81c$$

10. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse



Hebelgesetz: $m_o \cdot x_A = m \cdot x_C \Leftrightarrow m_o \cdot v \cdot t = m \cdot (\frac{2v}{1+v^2/c^2} \cdot t - v \cdot t)$ zu jedem Zeitpunkt t.

$$m_o \cdot v \cdot t = m \cdot (\frac{2v}{1+v^2/c^2} \cdot t - v \cdot t) \Leftrightarrow m_o \cdot v = m \cdot (\frac{2v}{1+v^2/c^2} - v) \Leftrightarrow$$

$$m_o \cdot v = m \cdot (\frac{2v \cdot c^2}{c^2+v^2} - v) \Leftrightarrow m_o \cdot v = m \cdot \frac{2v \cdot c^2 - v \cdot (c^2+v^2)}{c^2+v^2} \Leftrightarrow m_o \cdot v = m \cdot \frac{v \cdot c^2 - v^3}{c^2+v^2} \Leftrightarrow$$

$$m_o = m \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2+v^2} \Leftrightarrow m = m_o \cdot \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}$$

$$v_C = v \oplus v = \frac{v+v}{1+\frac{v \cdot v}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2vc^2}{c^2+v^2} \quad \text{also} \quad \frac{v_C}{c} = \frac{2vc}{c^2+v^2} \quad (*) \quad \text{und "trickreich"}$$

$$\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2} = \frac{c^2+v^2}{\sqrt{(c^2-v^2)^2}} = \frac{c^2+v^2}{\sqrt{c^4 - 2c^2v^2 + v^4 + 4c^2v^2 - 4c^2v^2}} = \frac{c^2+v^2}{\sqrt{c^4 + 2c^2v^2 + v^4 - 4c^2v^2}} =$$

$$\frac{c^2+v^2}{\sqrt{c^4 + 2c^2v^2 + v^4 - 4c^2v^2}} = \frac{c^2+v^2}{\sqrt{(c^2+v^2)^2 - 4c^2v^2}} = \frac{1}{\frac{1}{c^2+v^2} \cdot \sqrt{(c^2+v^2)^2 - 4c^2v^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(c^2+v^2)^2 - 4c^2v^2}{(c^2+v^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4c^2v^2}{(c^2+v^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2cv}{c^2+v^2}\right)^2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_C}{c}\right)^2}}$$

Aufgaben:

a) $m(v) = 1{,}10 \cdot m_o \Leftrightarrow \frac{m_o}{\sqrt{1-ß^2}} = 1{,}10\, m_o \Leftrightarrow \frac{1}{1{,}10} = \sqrt{1-ß^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1{,}1^2} = 1 - ß^2 \Leftrightarrow$

$ß^2 = 1 - \frac{1}{1{,}21} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = ß = \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}21}} = \sqrt{\frac{1{,}21-1}{1{,}21}} = \sqrt{\frac{0{,}21}{1{,}21}} = 0{,}4165...$ also $v \approx 0{,}42\,c$

b) $m(v) = 2 \cdot m_o \Leftrightarrow \frac{m_o}{\sqrt{1-ß^2}} = 2\, m_o \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1-ß^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} = 1 - ß^2 \Leftrightarrow$

$ß^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = ß = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660...$ also $v \approx 0{,}87\,c$

c) $m(v) = 10 \cdot m_o \Leftrightarrow \frac{m_o}{\sqrt{1-ß^2}} = 10\, m_o \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \sqrt{1-ß^2} \Leftrightarrow \frac{1}{10^2} = 1 - ß^2 \Leftrightarrow$

$ß^2 = 1 - \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{v}{c} = ß = \sqrt{1 - \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{99}{100}} = 0{,}9949...$ also $v \approx 0{,}99\,c$

11. Kinetische Energie und $E = mc^2$

Aufgaben:

a) $E = m \cdot c^2 = 1{,}0\,\text{kg} \cdot (3{,}0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 9{,}0 \cdot 10^{16}\,\text{J} = 9{,}0 \cdot 10^{13}\,\text{kWs} = \frac{9{,}0 \cdot 10^{13}\,\text{kWh}}{3600} =$

$2{,}5 \cdot 10^{10}\,\text{kWh}$

Bei einem „Wert“ von ca. 0,25€ pro kWh entspricht das etwa 6,25 Milliarden Euro.

b) $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200\,\text{kg} \cdot \left(\frac{180}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 1{,}5 \cdot 10^6\,\text{J}$

da $1{,}0\,\text{kg}$ einer Energie von $9{,}0 \cdot 10^{16}\,\text{J}$ entsprechen, entspricht diese kinetische Energie von $1{,}5 \cdot 10^6\,\text{J}$ einer Massenzunahme von $\frac{1{,}5 \cdot 10^6\,\text{J}}{9{,}0 \cdot 10^{16}\,\text{J}}\,\text{kg} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-10}\,\text{kg} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}$.

c) $3{,}82 \cdot 10^{26} \frac{\text{J}}{\text{s}} \;\widehat{=}\; \frac{3{,}82 \cdot 10^{26}\,\text{J}}{9{,}0 \cdot 10^{16}\,\text{J}} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 4{,}2 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 4{,}2$ Millionen Tonnen pro Sekunde

Galaktische Lügengeschichte

Das Geschoss bewegt sich relativ zur Galaxis mit der Geschwindigkeit

$$v = v_{\text{Enterpr}} \oplus v_{\text{Geschoss rel. Enterpr.}} = \frac{0{,}20\,c + 0{,}70\,c}{1 + \frac{0{,}20\,c \cdot 0{,}70\,c}{c^2}} = \frac{0{,}90\,c}{1{,}14} = \frac{15}{19} c = 0{,}789\ldots c < 0{,}80\,c$$

Das Geschoss kann damit die feindliche Rakete nicht einholen.
Es handelt sich um eine Lügengeschichte!