Spezielle Relativitätstheorie * Projekttage im Juli 2016 am EMG

1. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

a) Schallwellen

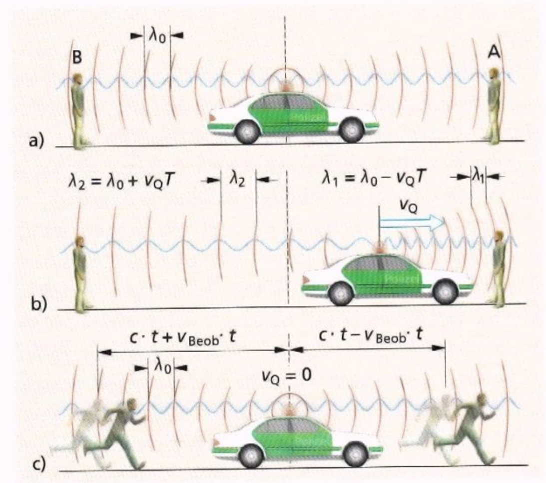
Schallwellen breiten sich in der Luft aus.
Die Höhe eines Tons hängt von der Wellenlänge λ bzw. von der Frequenz f ab.
Hierbei gilt für die Schallgeschwindigkeit c :

$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$ wobei T die Schwingungsdauer ist.

Bewegt sich der Sender relativ zur Luft, so nimmt ein ruhender Beobachter eine andere Tonhöhe wahr.
Bewegt sich der Beobachter relativ zum ruhenden Ausbreitungsmedium Luft. So erreichen ihn die Schallwellen mit der Geschwindigkeit $c \pm v_{Beob}$.

Animationen:

https://www.planet-schule.de/sf/php/mmewin.php?id=101
https://www.planet-schule.de/sf/php/mmewin.php?id=53
http://www.mabo-physik.de/dopplereffekt.html (download)



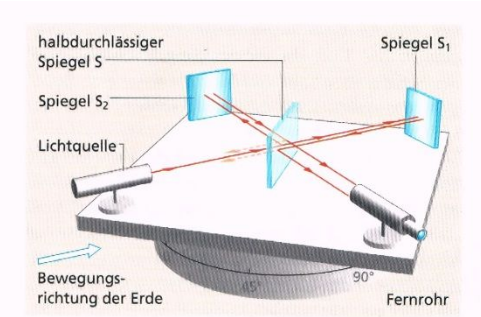
231.1 Dopplereffekt: a) Quelle und Beobachter ruhen; b) die Quelle bewegt sich; c) der Beobachter bewegt sich.

(Bildquelle: Physik Oberstufe Gesamtband, Cornelsen S. 231)

b) Licht (elektromagnetische Wellen)

In welchem Medium breitet sich Licht aus? Diese Frage stellten sich Physiker um 1900.
Man nahm als Medium den sogenannten „Äther“ an und versuchte die Bewegung der Erde in diesem Medium nachzuweisen. (Beachte: Erde bewegt sich um Sonne, Sonne bewegt sich in Galaxie …)

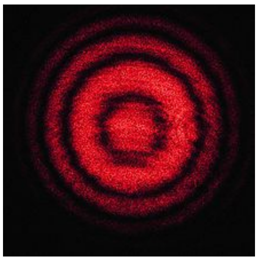
Michelson (1852-1931; Nobelpreis 1907) entwickelte 1881 in Potsdam ein optisches Interferometer, dessen extreme Empfindlichkeit ein Kontrollexperiment zur Ätherhypothese ermöglichte.
Morley (1838-1923) wiederholte 1885 das Experiment in Cleveland.



426.1 Michelson-Interferometer im »Ätherwind«

(Bildquelle: Physik Oberstufe Gesamtband, Cornelsen S. 426)

Ein Lichtbündel wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel S in zwei Teile zerlegt, die an den Spiegeln S_1 bzw. S_2 reflektiert werden und durch den Spiegel S schließlich in ein Fernrohr gelangen.
Da die Lichtwege der beiden Teilstrahlen nicht exakt gleich lang sind, kommen die beiden Strahlen mit einem Gangunterschied Δλ im Fernrohr an.
(D.h. ein Wellenberg von Strahl 1 kommt nicht genau mit einem Wellenberg von Strahl 2 zusammen.)



Die Überlagerung der beiden Teilstrahlen liefert daher ein so genanntes Interferenzbild.
Wenn sich die Laufzeit eines Teilstrahls nur minimal ändert, so vergrößern oder verkleinern sich die einzelnen Interferenzringe.
Da die Laufzeit der Teilstrahlen auch von der relativen Bewegung zum „Äther“ abhängt, sollte sich bei einer Drehung der gesamten Anordnung das Interferenzbild in der angegebenen Weise verändern.
Um eine ausreichende Genauigkeit zu erhalten, musste Michelson für den Abstand zwischen dem Spiegel S und den beiden Spiegeln S_1 und S_2 immerhin 10m wählen.

Auch bei späteren, noch genaueren Messungen ergab sich immer wieder das unerwartete Ergebnis:

Das Interferenzbild ändert sich nicht, d.h. man kann einen „Ätherwind“ nicht nachweisen.

Das Fehlen eines Ätherwinds versuchte man unterschiedlich zu deuten:

a)	Die Erde ruht im Ätherwind	(extrem unwahrscheinlich!)
b)	Die Erde führt den Äther mit	(Versuche von Fizeau und Fresnel; Mitführungshypothese)
c)	Längen verkürzen sich in Bewegungsrichtung	(Kontraktionshypothese von Lorentz 1892)
d)	Es gibt keinen Äther	(Einstein 1905)

2. Postulate der Speziellen Relativitätstheorie (SRT)

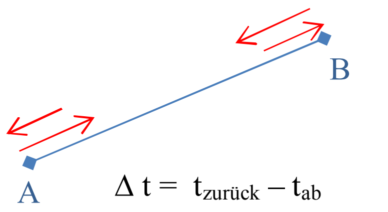
Einstein leitet 1905 seine SRT aus den beiden folgenden Postulaten her:

1. Relativitätsprinzip
Alle so genannten Inertialsysteme („nicht beschleunigte" Systeme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen) sind gleichberechtigt: In allen Inertialsystemen haben die physikalischen Gesetze die gleiche Form.

2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß.
Sie ist unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle und von der Ausbreitungsrichtung.
$c = 299.792.458$ m/s

3. Zeitlich-Räumliche Bezugssysteme

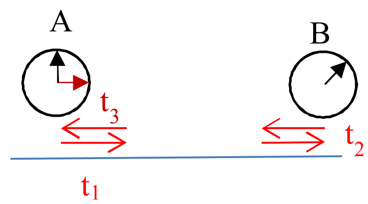
Längenmessung ruhender Strecken



Wie misst man die Länge einer ruhenden Strecke [AB]?
Sende von A einen Lichtstrahl zu B,
der bei B reflektiert wird.
Der reflektierte Strahl trifft nach der Zeit Δt wieder bei A ein.

Die Länge der Strecke beträgt $\overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \Delta t$

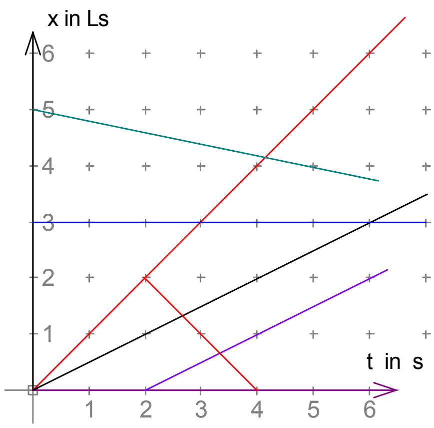
Synchronisation zueinander ruhender Uhren



Um zwei zueinander ruhende Uhren zu synchronisieren sendet man von Uhr A zum Zeitpunkt t_1 ein Lichtsignal zur Uhr B, das dort zum Zeitpunkt t_2 reflektiert wird. Kommt das Lichtsignal zum Zeitpunkt t_3 bei A zurück,

so gilt $t_2 = \frac{1}{2} \cdot (t_1 + t_3)$.

Minkowski-Diagramme



Zur Veranschaulichung von zueinander sich (in x-Richtung) mit konstanter Geschwindigkeit v bewegender Systeme S und S´ wählt man ein t-x-Diagramm, bei dem man auf der t-Achse die Einheit 1s und auf der x-Achse die Einheit 1 Lichtsekunde = 1 Ls = 1c · 1s wählt.
Ein Lichtstrahl „bewegt" sich dann auf einer Geraden mit der Steigung 1 oder -1.

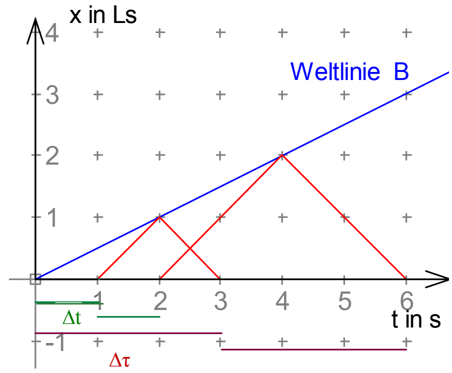
Wichtige Begriffe:

Ein **Ereignis** entspricht einem Punkt im Minkowski-Diagramm, das ist ein bestimmter Ort zu einer bestimmten Zeit. (Z.B. Ort und Zeit der Reflexion eines Lichtsignals)
Eine **Weltlinie** ist der Graph eines Gegenstands oder Lichtsignals als Funktion der Zeit.

Aufgabe: Zeichne das abgebildete Minkowskidiagramm ab und gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an. Was beschreiben die Geraden?

4. Geschwindigkeitsradar

B (System S´) bewegt sich relativ zu A (System S) mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung.
Im zeitlichen Abstand Δt sendet A Lichtsignale an B.
Diese Signale werden bei B reflektiert und kehren im zeitlichen Abstand Δτ bei A zurück.



Zeige:

$$\Delta\tau = \frac{c+v}{c-v}\cdot\Delta t \quad \text{und} \quad v = \frac{\Delta\tau - \Delta t}{\Delta\tau + \Delta t}\cdot c$$

Hinweis: Nähert sich B mit der Geschwindigkeit v (in negativer x-Richtung), so stimmen die beiden Formeln ebenfalls, wobei v negativ einzusetzen ist bzw. einen negativen Wert erhält.

Aufgabe: Bestätige die Behauptung des Hinweises durch eine genaue Zeichnung zur Weltlinie $x = 6c\cdot s - 0{,}6c\cdot t$ für B und $\Delta t = 1{,}0\,s$.

Wenn man von A aus Licht bzw. Radar der Frequenz f_{ab} zu B schickt, so kommt das reflektierte Signal mit der Frequenz $f_{zurück}$ zurück und es gilt:

$$f_{ab} = \frac{c+v}{c-v}\cdot f_{zurück} \quad \text{denn} \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{also} \quad f_{ab} = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{und} \quad f_{zurück} = \frac{1}{\Delta\tau} \quad \text{und daher}$$

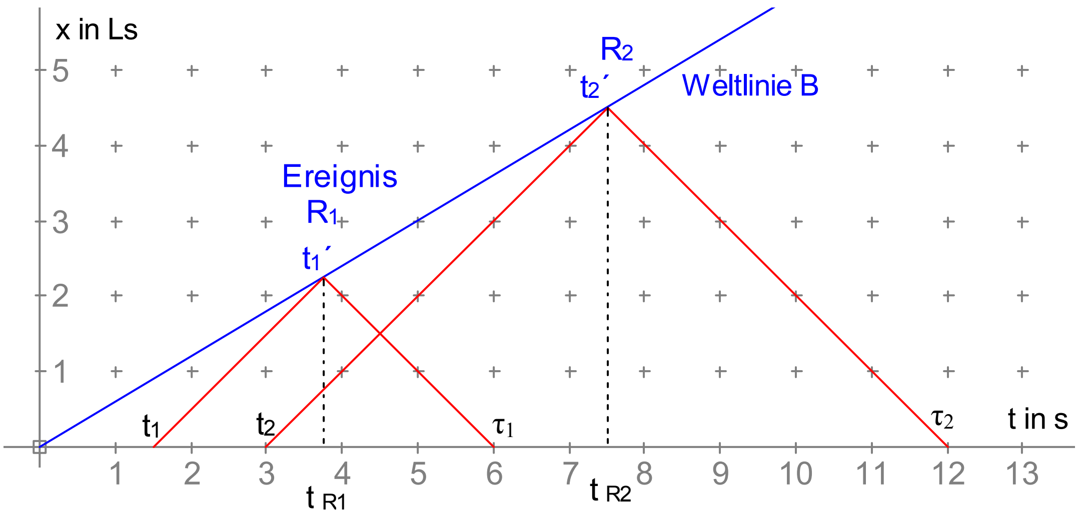
$$\frac{f_{ab}}{f_{zurück}} = \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{c+v}{c-v} \quad \text{und nach v aufgelöst} \quad v = \frac{f_{ab} - f_{zurück}}{f_{ab} + f_{zurück}}\cdot c$$

5. Der k-Faktor (Dopplerfaktor)

B (System S´) bewegt sich relativ zu A (System S) mit der Geschwindigkeit v.
Im zeitlichen Abstand Δt sendet A Lichtsignale an B.
B empfängt diese Signale im zeitlichen Abstand Δt´ mit seiner Uhr, die er mit sich führt.
Der k-Faktor wird festgelegt durch $\Delta t' = k\cdot\Delta t$.

Begründe (zunächst für positives v)

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} > 1 \text{ für } v > 0 \text{ (B entfernt sich) bzw. } k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} < 1 \text{ für } v < 0 \text{ (B nähert sich an)}$$



6. Skalierung der t´-Achse und das Zwillingsparadoxon

Aufgabe:

Beobachter B (System S´) bewege sich mit $v = 0{,}6c$ in positiver x-Richtung relativ zu Beobachter A (System S).

a) Zeichne ein Minkowski-Diagramm und trage auf der t´-Achse von B die von B gemessenen Zeiten ein.

Nachdem sich B zunächst (nach seiner Zeitmessung) 4s von A entfernt hat, „wendet" er „plötzlich" und bewegt sich nun wieder (mit gleicher Geschwindigkeit 0,6c) auf A zu. Während der gesamten Zeit sendet A im Abstand von exakt 1s Lichtsignale an B, die bei B reflektiert werden.

b) Zu welchen Zeitpunkten (in den jeweiligen Systemen) treffen sich A und B erneut?

7. Das t´- x´- Koordinatensystem und die Relativität der Gleichzeitigkeit

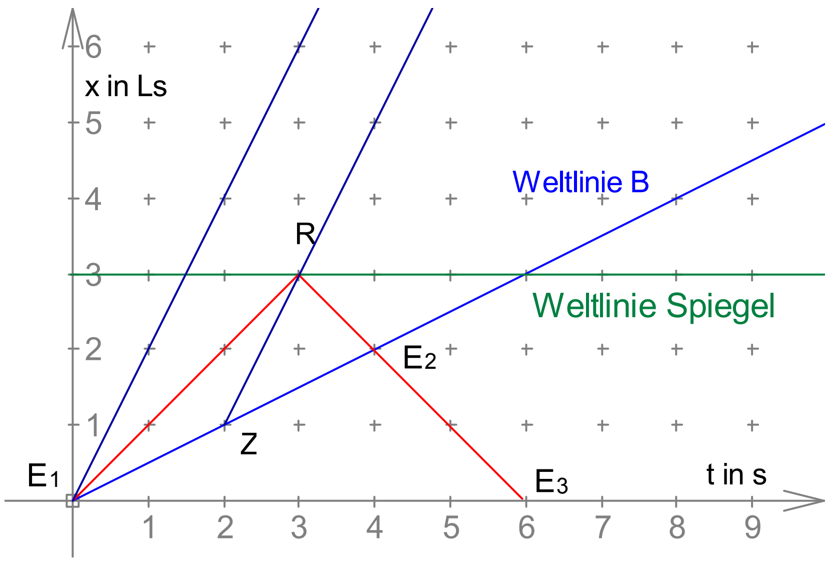
Beobachter B (System S´) bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}5c$ in positiver x-Richtung relativ zu Beobachter A (System S).
Zum Zeitpunkt $t = 0s$ und $t´= 0s$ der Begegnung von A und B (Ereignis E_1) sendet A ein Lichtsignal aus, das im Abstand von $x_R = 3$ Ls an einem Spiegel reflektiert wird (Ereignis R).
Das reflektierte Lichtsignal kommt zunächst an Beobachter B vorbei (Ereignis E_2) und erreicht schließlich Beobachter A (Ereignis E_3).

Zeichne das abgebildete Minkowski-Diagramm ab!

a) Begründe, dass das Ereignis Z aus Sicht von B gleichzeitig mit dem Ereignis R stattfindet. Für A dagegen finden die Ereignisse Z und R nicht gleichzeitig statt. Welche Zeitspanne liegt für A zwischen diesen beiden Ereignissen.

b) Begründe, warum die zu ZR parallele Gerade die x´-Achse von System S´ist.

c) Begründe, dass die x´-Achse und die t´-Achse achsensymmetrisch zum ausgesandten Lichtsignal liegen.



8. Zeitdilatation und Längenkontraktion

a) Zeitdilatation (Zeitdehnung)

B bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung.
B und A begegnen sich zum Zeitpunkt $t = t' = 0$.
Zum Zeitpunkt t_1 sendet A eine Lichtsignal an B, das zum Zeitpunkt t_R bei B reflektiert wird (Ereignis R). Für B findet das Ereignis zum Zeitpunkt t_R' statt.

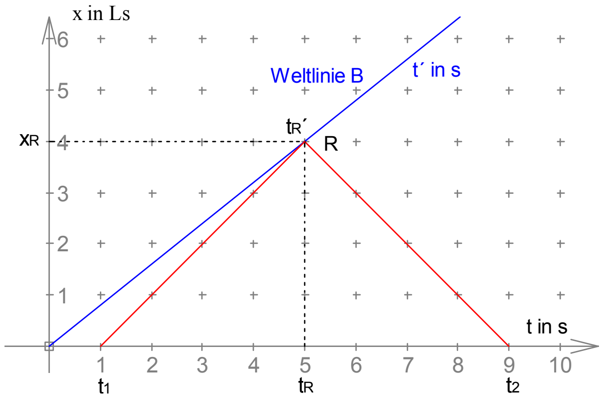
Während seit dem Zeitpunkt $t = t' = 0$ für die Uhr von B die Zeitspanne $\Delta t' = t_R'$ vergangen ist, zeigen die synchronisierten Uhren im System von A die Zeitspanne $\Delta t = t_R$ an.

Zeige:

$$\Delta t' = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \cdot \Delta t$$

mit $\frac{v}{c} = ß$ schreibt man kürzer

$$\Delta t' = \sqrt{1 - ß^2} \cdot \Delta t$$



Merke: Bewegt sich eine Uhr mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Satz synchronisierter Uhren, so geht diese Uhr um den Faktor $\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = \sqrt{1 - ß^2}$ langsamer als der Satz synchroniserter Uhren.

b) Längenkontraktion

Die Reflexion des Signals (Ereignis R im Bild oben) findet von A aus betrachtet im Abstand x_R statt. An dieser ruhenden Strecke der Länge $\Delta x = x_R$ ist B mit der Geschwindigkeit v vorbeigeflogen.
B beurteilt die Länge dieser Strecke daher mit $\Delta x' = x_R' = v \cdot t_R'$

Zeige:

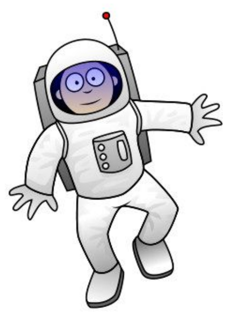
$$\Delta x' = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \cdot \Delta x = \sqrt{1 - ß^2} \cdot \Delta x$$

Merke:
Ein im System A ruhender Maßstab der Länge Δx wird von einem System B, das sich in Richtung dieser Länge mit der Geschwindigkeit v bewegt, um den Faktor

$$\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = \sqrt{1 - ß^2}$$ verkürzt gemessen.

Aufgabe:

Astronaut Pirx möchte zu einem 10 Lichtjahre entfernten Stern fliegen.
Er will diese Strecke aber in nur 2 Jahren zurücklegen.



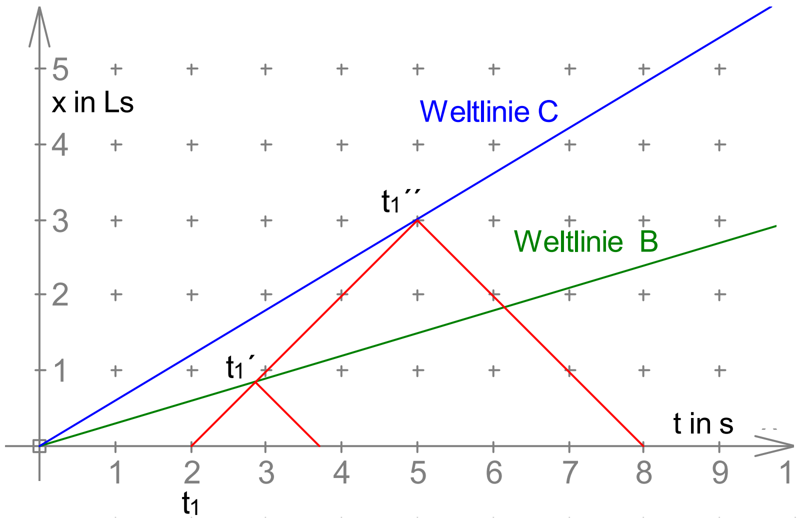
a) Zeige, dass dies möglich ist und bestimme die erforderliche „Reisegeschwindigkeit“.

b) Welchen „Kilometerstand“ zeigen die Messinstrumente von Pirx an, wenn er mit einem Kilometerstand von 0 Lichtsekunden gestartet ist.

9. Einsteinaddition von Geschwindigkeiten

B bewege sich relativ zu A mit der Geschwindigkeit $v_{AB} = v_1 > 0$
C bewege sich relativ zu A mit der Geschwindigkeit $v_{AC} = v_2 > v_1$
C bewege sich relativ zu B mit der Geschwindigkeit $v_{BC} = u$ (und damit $u > 0$)
Leider gilt <u>nicht</u> $v_2 = v_1 + u$!

Zeige: $u = \dfrac{v_2 - v_1}{1 - \dfrac{v_2 \cdot v_1}{c^2}}$ und $v_2 = \dfrac{v_1 + u}{1 + \dfrac{v_1 \cdot u}{c^2}}$



Hinweis: Verwende die folgenden Dopplerfaktoren:

$$k_1 = \frac{c + v_1}{c - v_1} \; ; \; k_2 = \frac{c + v_2}{c - v_2} \; ; \; k = \frac{c + u}{c - u} \quad \text{und begründe} \quad k = \frac{k_2}{k_1}.$$

Zeige $u = \dfrac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \cdot c$ und $k^2 = \dfrac{(c + v_2) \cdot (c - v_1)}{(c - v_2) \cdot (c + v_1)}$ und setze dieses k^2 beim Term für u ein!

Aufgaben:

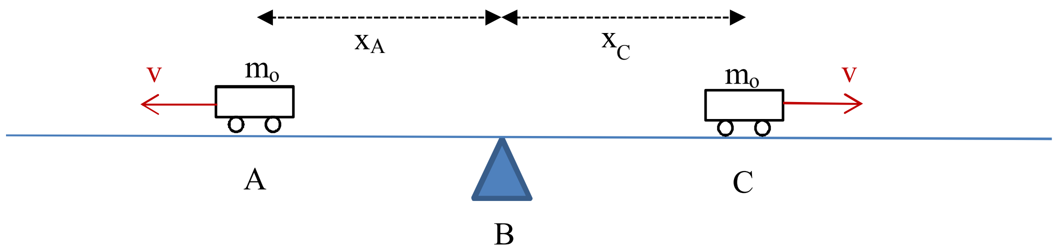
1. B bewege sich relativ zu A mit $v_1 = 0{,}5c$ und C bewege sich mit $v_2 = 0{,}8c$ relativ zu B. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich C relativ zu A?
2. B bewege sich relativ zu A mit $v_1 = 0{,}8c$ und C bewege sich mit $v_2 = -0{,}5c$ relativ zu B. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich C relativ zu A?
3. B bewege sich relativ zu A mit $v_1 = 0{,}6c$. B sendet in Vorwärts- wie in Rückwärtsrichtung ein Lichtsignal mit der Geschwindigkeit c aus.
   Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Lichtsignal (laut Eisteinaddition) relativ zu A?
4. Raumschiff Enterprise entfernt sich mit 60% der Lichtgeschwindigkeit von der Erde.
   Eine feindliche Rakete fliegt mit 95% der Lichtgeschwindigkeit an der Enterprise in Richtung Erde vorbei. Mit welcher Geschwindigkeit wird die Rakete auf der Erde einschlagen?

Hinweis: Man schreibt $\dfrac{v_1 + u}{1 + \dfrac{v_1 \cdot u}{c^2}} = v_1 \oplus u$ und spricht von der Einsteinaddition.

10. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse

Gedankenversuch: Gleichgewicht auf der Balkenwaage

Im System B befindet sich eine Balkenwaage (mit unendlich langen Balken).
Zwei Wagen gleicher Masse m_o bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit v vom Drehpunkt in entgegengesetzter Richtung weg. Die Balkenwaage befindet sich daher immer im Gleichgewicht, denn von B aus betrachtet sind die beiden Wagen vom Drehpunkt immer gleich weit entfernt.
Beobachter A bewegt sich mit dem linken Wagen, Beobachter C mit dem rechten Wagen mit.
Im Gleichgewichtsfall gilt im System B : $m_o \cdot x_A = m_o \cdot x_C$
Mit m_o gibt man die so genannte Ruhemasse des Wagens an, d.h. die Masse des Wagens in einem System, in dem der Wagen ruht.



Im Folgenden betrachten wir den Vorgang aus der Sicht des Beobachters A:

B bewegt sich mit $v_B = v$ nach rechts und C bewegt sich mit $v_C = v \oplus v = \dfrac{2v}{1+v^2/c^2}$ nach rechts.

Der Abstand des linken Wagen vom Drehpunkt beträgt $x_A = v \cdot t$ zum Zeitpunkt t.
Der Abstand des rechten Wagen vom Drehpunkt beträgt $x_C = v_C \cdot t - x_A$ zum Zeitpunkt t.
Da nun – wie die Rechnung gleich zeigt – die Hebelarme x_A und x_C im System von A nicht mehr gleich lang sind, aber immer noch das Hebelgesetz $m_o \cdot x_A = m \cdot x_C$ gelten muss, können die Massen der Wagen im System A nicht mehr gleich sein.
Für die Masse des Wagens bei C muss Beobachter A einen anderen Wert als m_o bestimmen, und dieser neue Wert der Masse hat damit zu tun, dass sich der Wagen relativ zu A mit der Geschwindigkeit v_C bewegt. (Der linke Wagen hat für A dagegen die Masse m_o.)

Hebelgesetz: $m_o \cdot x_A = m \cdot x_C \;\Leftrightarrow\; m_o \cdot v \cdot t = m \cdot \left(\dfrac{2v}{1+v^2/c^2} \cdot t - v \cdot t\right)$ zu jedem Zeitpunkt t.

Aufgabe: Leite aus dem angegeben Hebelgesetz zunächst folgende Beziehung her:

$$m = m_o \cdot \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} \quad \text{(Gleichung 1)}$$

Da wir aber $m = m(v_C)$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v_C ermitteln wollen, müssen wir in Gleichung 1 noch v durch v_C ersetzen.

$$\text{Zeige:} \quad m = m(v_C) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_C}{c}\right)^2}}$$

Merke: Die Masse eines Gegenstands nimmt mit seiner Geschwindigkeit u zu.

$$\text{Es gilt} \quad m(u) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{(mit der Ruhemasse } m_o\text{)}$$

Aufgabe: Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Körper bewegen, damit seine Masse

a) 10% mehr als seine Ruhemasse,
b) die doppelte Ruhemasse,
c) die 10-fache Ruhemasse beträgt.

11. Kinetische Energie und $E = mc^2$

Für kleine Geschwindigkeiten v gilt die Näherung: $$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

Damit folgt: $$m \cdot c^2 = \frac{m_o \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_o c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\cdot m_o c^2 = m_o c^2 + \frac{1}{2}\cdot m_o \cdot v^2 = m_o c^2 + E_{kin}$$

bzw. $$E_{kin} = mc^2 - m_o c^2 = (m - m_o)\cdot c^2$$

Eine Zunahme der kinetischen Energie bedeutet also eine Zunahme der Masse.
Für Geschwindigkeiten, die im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit klein sind, lässt sich die kinetische Energie aber einfacher und trotzdem sehr genau mit der bekannten Formel $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ berechnen.

Zudem liegt der Verdacht nahe, dass in der Ruhemasse m_o ebenfalls Energie „steckt“, nämlich $E_o = m_o c^2$

Die Gleichung $E = m\cdot c^2$ besagt, dass Energie und Masse äquivalent sind.
Aus Energie lässt sich Masse erzeugen und aus Masse kann man Energie erzeugen.
Kernkraftwerke, Kernwaffen, Teilchenbeschleuniger und insbesondere der „Fusionsreaktor“ Sonne bestätigen diese Äquivalenz.

Aufgaben zu $E = mc^2$

a) Berechne die Energie, die in der Masse 1,0 kg steckt, in der Einheit kWh.

b) Ein PKW (Masse 1,2 Tonnen) fährt mit einer Geschwindigkeit von 180 km/h.
Berechne die kinetische Energie in der Einheit J.
Welcher Massenzunahme des PKW entspricht das?

c) Die Sonne besitzt eine Strahlungsleistung von $3{,}82 \cdot 10^{26}$ W.
Wie viel Masse wandelt die Sonne pro Sekunde in reine Energie um?

Galaktische Lügengeschichte?

Das Raumschiff Enterprise fliegt mit 20% der Lichtgeschwindigkeit durch die Galaxis, als es von einer feindlichen Rakete überholt wird, die sich relativ zur Galaxis mit 0,80c bewegt.
Der Kommandant löst sofort ein 0,70c-Geschoss aus, das die Verfolgung der Rakete aufnimmt und kurze Zeit später diese Rakete zerstört.
Prüfe im System der Galaxis sowie im System des Raumschiffs, ob es sich um eine wahre Geschichte handeln kann!

Interessante Seiten Im Internet:

http://www.zdf.de/interaktive-einfuehrung-in-die-relativitaetstheorie-24729156.html
http://www.zdf.de/ZDFmediathek#/beitrag/video/2670634/Die-Relativitätstheorie-für-Einsteiger
http://www.besold.info/einstein/index2.htm